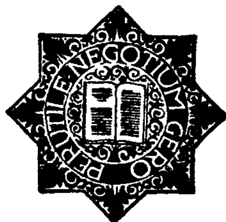
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

8e JAARGANG 1931/32, Nr. 2/3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☛ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. WOLFF.

DRIE PROBLEMEN UIT DE AEGYPTISCHE WISKUNDE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

§ 1. Inleiding.

De sterke toename van de historisch-mathematische belangstelling in de Egyptische wiskunde, die sedert de verschijning in 1923 van de door T. E. Peet verzorgde editie van den Papyrus Rhind valt op te merken, begint zich in onzen tijd reeds zoozeer te weerspiegelen in de handboeken der wetenschapsgeschiedenis, dat men thans wel bij iederen algemeen ontwikkelden mathematicus een zekere mate van kennis van den aard der problemen, die de Egyptenaren omstreeks 20 eeuwen voor het begin onzer jaartelling hebben behandeld en eenig inzicht in het wiskundig peil, waarop die behandeling stond, aanwezig mag achten.

Het is daarbij wel onvermijdelijk, dat die kennis in het gunstigste geval (namelijk wanneer men een werk heeft geraadpleegd, dat op directe bronnenstudie berust) nog slechts tweede-hands kan zijn: men kan inderdaad van niemand, die uit historische belangstelling kennis van de Egyptische wiskunde wil nemen, vergen, dat hij zich de Egyptische taal en het Egyptische schrift in voldoende mate eigen zal maken, om den Papyrus Rhind in het oorspronkelijke te kunnen lezen en het is dus niet meer dan natuurlijk, dat men vertrouwt op wat de handboeken daarover mededeelen. Toch zal reeds bij menigeen, die over den inhoud van den papyrus las, die de wonderlijk aandoende problemen leerde kennen, die er in behandeld worden en de merkwaardige, nu eens buitensporig onhandig, dan weer verrassend virtuoos lijkende rekentechniek ervoer, waarvan de schrijver zich bedient, de wensch zijn opgekomen, nu ook eens precies te weten, hoe de Egyptenaren al die, maar al te snel in moderne symbolen omgezette en dus uit hun historische spheer gerukte redeneeringen

zelf formuleerden en eens na te gaan, of niet uit de eigenaardigheden van het schrift der Egyptenaren een beter inzicht in de typische eigenschappen van hun mathematische terminologie en hun rekentechniek te putten zou zijn [1]).

Tot voor korten tijd moesten wenschen als deze bij gebrek aan een uitgave van den papyrus, die ook den niet-Egyptoloog in staat stelde, den tekst van zeer nabij te leeren kennen, noodzakelijk onvervuld blijven. Sedert echter A. B. Chace en zijn medewerkers de kostbare editie in het licht hebben gegeven, waarover in dit tijdschrift reeds kort werd bericht (*Historische Revue*, VII, 1930/1931, p. 264), is dat geheel anders geworden. Men kan thans den hieratisch geschreven tekst in hieroglyphische transcriptie met bijgevoegde transliteratie en letterlijke vertaling woord voor woord volgen en daardoor reeds met een zeer oppervlakkige kennis van Egyptische taal en Egyptisch schrift nauwkeurig nagaan, hoe alle redeneeringen en berekeningen in het origineel eruit zien. Het eenige, wat men dan nog op gezag aanvaardt, is de juistheid van de hieroglyphische transcriptie.

Het is nu de bedoeling van dit artikel, de vermelde mogelijkheid door een paar voorbeelden te demonstreeren. Daartoe zullen enkele bladzijden van het facsimile van den hieratischen tekst met de hieroglyphische transcriptie worden gereproduceerd en er zal getracht worden, den inhoud van deze bladzijden te verduidelijken.

Het zal daartoe echter noodig zijn, enkele paragraphen te laten voorafgaan, waarin eenige onmisbare hoofdzaken over het schrift der Egyptenaren en over hun rekentechniek zullen worden behandeld [2]).

---

[1]) De lezer, die zich voor de eigenaardigheden der Egyptische arithmetica interesseert, kan ter nadere informatie een der werken raadplegen, die ik heb vermeld of besproken in *Historische Revue* (Euclides VII, 1930/1931). Daarnaast kan nog genoemd worden: O. Gillain, *La science Égyptienne. L'arithmétique au Moyen Empire.* Bruxelles (Fondation Égyptologique Reine Élisabeth) 1927. Voor mijn eigen inzicht in de Egyptische wiskunde heb ik veel te danken aan de werken van O. Neugebauer.

[2]) Bij het samenstellen van het volgend overzicht heb ik, behalve van de in noot 1 gememoreerde werken, gebruik gemaakt van Alan H. Gardiner, *Egyptian Grammar. Being an introduction to the study of Hieroglyphics.* Oxford (Clarendon) 1927. Bibl. van het Rijks Museum van Oudheden, Leiden.

Voor een eerste kennismaking kan men ook raadplegen: A. Erman, *Die Hieroglyphen.* Samml. Göschen 608. Berlin—Leipzig, 1923.

§ 2. Het Egyptische schrift.

Het Egyptische hieroglyphenschrift is zeer waarschijnlijk oorspronkelijk een zuiver beeldenschrift geweest: men teekende het mee te deelen feit in groote lijnen en met gebruikmaking van enkele afgesproken teekens ter verduidelijking Dit was alleen mogelijk, zoolang de mededeelingen handelden over concrete voorwerpen, die zich op eenvoudige wijze lieten afbeelden (b.v. vijf runderen, voorgesteld door een rund met vijf strepen erbij) en over abstracte begrippen, die door teekeningen gemakkelijk konden worden gesuggereerd (b.v. spreken, door twee tegenover elkaar staande menschen). Het is echter duidelijk, dat deze methode bij voortschrijdende beschaving spoedig ontoereikend moest worden. De Egyptenaren hebben toen, kort voor het begin van de prae-dynastische periode (dus waarschijnlijk omstreeks — 3500) een mogelijkheid van verdere ontwikkeling van het schrift geschapen door toepassing van wat wij het rebusprincipe zouden kunnen noemen: dingen, die zelf niet of althans niet gemakkelijk konden worden afgebeeld, werden voorgesteld door teekeningen van voorwerpen, die daarmee geheel of bijna gelijkluidende namen hadden. Dat dit beginsel, in onzen tijd nog bekend, maar niet anders dan schertsenderwijs toegepast, in Egypte tot zulk een ver ontwikkeld schriftsysteem heeft kunnen leiden, hangt samen met een eigenaardigheid van de Egyptische taal; deze heeft namelijk met de eraan verwante Semitische talen, zooals het Hebreeuwsch, het Arabisch en het Babylonisch, de eigenschap gemeen, dat de woordstammen bestaan uit combinaties van consonanten en dat grammaticale flexies en geringe wijzigingen in beteekenis voornamelijk worden weergegeven door veranderingen in de inwendige vocalen; daardoor kon het consonant-skelet van een woord gevoeld worden als het wezenlijke bestanddeel daarvan en daaruit kon de voor onze taalgewoonten zoo wonderlijk schijnende eigenschap voortkomen, die het Egyptisch met het Phoenicisch, het Hebreeuwsch en het Arabisch gemeen heeft, dat namelijk slechts de consonanten worden opgeschreven, terwijl de vocaliseering aan den lezer wordt overgelaten [1]).

[1]) Die vocaliseering geschiedt in de Egyptologie hoofdzakelijk door vocalen *e*, terwijl voor enkele klanken zonder algemeen bekend modern aequivalent *a* wordt gezegd en enkele half-vocalen als *i* en *u* worden uitgesproken. Zoolang men over hieroglyphen alleen schrijft en leest, is de behoefte aan vocaliseering trouwens weinig voelbaar.

Deze eigenschap nu moest de toepassing van het rebus-principe sterk bevorderen: men kon het beeld van het eene ding gebruiken om het andere voor te stellen, wanneer beider namen slechts het zelfde consonanten-skelet hadden. Zoo kon de kever (scarabaeus sacer) dienen om het werkwoord „worden" te schrijven, omdat beide woorden in het Egyptisch de consonantenrij *ḫpr*[1]) bevatten; een hoofd, en face geteekend, kon, behalve een hoofd, ook de praepositie „op, bij" in sommige uitdrukkingen (b.v. in optellen) beduiden wegens het gemeenschappelijk bezit van de consonanten *ḥr*. Het komt hierop neer, alsof wij een zuil teekenden om de woorden „zuil", „zaal", „zool", ziel" enz. aan te geven.

De geschetste toepassing van het rebus-beginsel voert echter nog lang niet tot het volledig systeem der hieroglyphen; dit is eerst ontstaan, toen men in den loop der tijden een figuur, die eerst een bepaald voorwerp had afgebeeld en toen misschien nog andere, eveneens bepaalde dingen met dezelfde consonantengroep in hun naam had voorgesteld, ging opvatten als graphisch symbool voor die consonantengroep in abstracto. Immers hierdoor werden de geteekende figuren tot symbolen voor lettergroepen of voor enkele letters, zoodat men er woorden mee kon schrijven, die uit die lettergroepen of letters en uit andere waren samengesteld, zonder dat men nog behoefde te denken aan de begrippen, die in eersten aanleg of na de eerste toepassing van het rebus-principe door de gebruikte symbolen werden gerepraesenteerd. Zoo kon een teekening van het oog, genaamd *ỉrt*[2]) (waarin t slechts een uitgang ter aanduiding van het vrouwelijk geslacht is), worden tot symbool voor de lettergroep *ỉr* en als zoodanig, eventueel met andere teekens gecombineerd, voorkomen in de hieroglyphische schrijfwijze van *ỉrỉ, maken* en *ỉrtt, melk*; wat oorspronkelijk een afbeelding van een mond (*r*) was, werd

---

1) Er zijn vier Egyptische consonanten, die door de letter h worden weergegeven en die men onderscheidt als *h, ḥ, ḫ, ẖ*. Zonder op uitspraak-finesses in te gaan, kunnen we de eerste twee als h-klanken, de laatste twee als ch-klanken beschouwen.

2) Met de letter *ỉ* geven we het Egyptische teeken 𓇋 weer, waarvan de klankwaarde ongeveer met die van onze *j* schijnt te hebben overeengestemd.

tot symbool voor de consonant *r*, waar en hoe ook gebruikt; de *ḏ* kon door een slang worden voorgesteld, omdat een slang den naam *ḏt* had[1]). Het is een redelijk vermoeden, dat op deze wijze al de talrijke teekens, die een, twee of drie letters aanduiden, zijn ontstaan, al is het dan ook nog niet gelukt, hun aller herkomst op de aangegeven wijze na te speuren; zoo weet men nog niet, hoe het komt, dat de letter *w* door een kwartelkuiken wordt voorgesteld.

Wanneer we het tot dusver meegedeelde samenvatten, kunnen we twee soorten van hieroglyphische teekens onderscheiden:

I. de **ideogrammen** of niet-phonetische teekens, die het object aanduiden, dat ze voorstellen.

II. de **phonogrammen** of phonetische teekens, oorspronkelijk eveneens ideogrammen, die op de boven beschreven wijze gaandeweg symbolen zijn geworden òf voor een ander woord, dan ze eigenlijk afbeelden òf voor een letter of lettergroep; in het laatste geval worden ze naar het aantal letters, dat ze weergeven, onderscheiden in uniliterale, biliterale en triliterale teekens.

Van beide groepen wordt nu echter de beteekenis in het practisch gebruik nog weer gewijzigd.

In de eerste plaats worden ideogrammen ook gebruikt, om woorden aan te duiden, die met het voorgestelde object verwant zijn, niet naar consonantenbouw, zooals bij het gebruik als phonogram, maar naar den zin. Zoo kan b.v. het symbool voor zon (een kringetje met stip erin, dat als primitieve afbeelding te beschouwen is) ook „dag" beduiden; een afbeelding van schrijfgereedschap, bestaande uit schrijfpalet, waterkom en riethouder, kan ook het woord „schrijven" weergeven.

In de tweede plaats echter gaat men zoowel deze in uitgebreiden zin gebruikte teekens als de phonetisch gebruikte ideogrammen nader verduidelijken door de medeklinkers van het voorgestelde woord geheel of ten deele nog eens afzonderlijk (weer in den vorm van phonogrammen) te vermelden. Men moet hierbij blijkbaar twee gevallen onderscheiden:

a) een stralende zon kan worden gebruikt, om het zinverwante begrip „schijnen" weer te geven, hoewel het woord voor „schijnen"

---

[1]) De *ḏ* wordt door de Egyptologen vaak als *z* uitgesproken.

(*wbn*) met dat voor zon (*r*ʿ)[1]) geen enkele consonant gemeen heeft. Men laat dan aan de teekening van die stralende zon de consonanten *wbn* voorafgaan; wanneer daarentegen de consonanten bij een beeld geheel ontbreken, is het in het algemeen de bedoeling, dat het ideogram werkelijk zal beduiden, wat het voorstelt. Deze bedoeling wordt meestal nog geaccentueerd door een verticale streep. Er bestaan echter op deze regels ook wel weer uitzonderingen. Zoo wordt „zoon" geschreven met het ideogram van de gans (*sꜣ*)[2]) zonder vermelding van consonanten en met de verticale streep.

b) wanneer men de scarabee wil gebruiken om het woord „worden" (*ḫpr*) aan te duiden, vermeldt men de *r* nog eens apart, hoewel ze al opgesloten zit in het keverteeken. Het is dan uitdrukkelijk de bedoeling, dat die vermelding geen verdubbeling van de *r* beduidt, maar slechts een herinnering, dat ze in het geteekende symbool voorkomt. Zulk een letter heet een phonetisch of alphabetisch complement.

Het zal nu echter wel duidelijk zijn, dat ondanks voorzorgen als de laatstgenoemde toch nooit een volkomen ondubbelzinnigheid wordt bereikt. Woorden met dezelfde medeklinkers zullen altijd onderhevig zijn aan verwisseling, wanneer men niet voor nadere verduidelijking van de bedoeling zorg draagt. Zoo kan *wḏ* „zuil" beteekenen, maar ook „bevelen", *bꜣk* kan „werken" zijn, maar ook „bediende". Hoe zal men tusschen deze verschillende beteekenissen onderscheiden?

Het antwoord op deze vraag is te geven met behulp van de z.g. **determinatieven,** d. z. teekens, die men in het algemeen als soort-ideogrammen kan aanduiden en die door hun toevoeging practisch wel ondubbelzinnig bepalen, wat er met de voorafgaande teekens bedoeld wordt. Zoo wordt achter *bꜣ*k in de beteekenis van „werken" een mannetje geteekend, dat in zijn opgeheven handen een stok draagt en dat overal voorkomt, waar van kracht of krachtsinspanning sprake is, zooals achter *ḥwỉ*,

1) Met het teeken ʿ geven we een keelklank weer, die geen Nederlandsch aequivalent heeft. Te vocaliseeren als *a*.

2) Het teeken ꜣ is de transliteratie van de Egyptische gier, die den stembandklapper aangeeft, die men o. a. hoort aan het begin van het Duitsche woord Adler. Te vocaliseeren als *a*.

slaan; *nht*, sterk; *nhm*, wegnemen, *h'd3*, plunderen, *sb3*, onderwijzen; moet echter *b3k* bediende voorstellen, dan wordt er een ander figuurtje achter geplaatst, voorstellende een zittenden man, dat men ook aantreft achter het woord voor „man", „ik", „zoon", „hoveling" enz. Achter *wd* in de beteekenis „zuil" staat een zuil geteekend; op *wd*, *bevelen*, volgt echter de afbeelding van de toegebonden papyrusrol, die het algemeen determinatief is voor alle abstracte begrippen.

Bij deze in beginsel wel onmiddellijk duidelijke gewoonte zijn nu echter drie opmerkingen te maken:

α) Wanneer men achter *wd*, *zuil*, een zuil teekent, dan kan het lijken, alsof dat teeken alleen al voldoende zou zijn, om de bedoeling weer te geven en dat de consonantteekens *wd* dus overbodig zijn. Inderdaad moet men in dit geval de consonanten meer beschouwen als toegevoegd ter determineering van het (misschien niet gemakkelijk herkenbare) ideogram, dan omgekeerd het ideogram als determinatief van het door de consonanten uitgedrukte woord. Zoo opgevat nadert deze toepassing van determinatieven dus weer tot het gebruik van de boven onder *a*) genoemde, door consonanten verduidelijkte ideogrammen. Een duidelijk voorbeeld van deze beteekenis van een determinatief heeft men in enkele werkwoorden, die gedetermineerd zijn door het z.g. twee-voeten-symbool, dat o.a. bij alle beweging aanduidende termen voorkomt. Men onderscheidt b.v. *gaan* (*šm*) van komen (*ìw*) door aan het symbool de eerste maal het teeken voor š [1]), de tweede dat voor *ì* toe te voegen.

β) Determinatieven zijn eigenlijk ideogrammen; het is echter eigenaardig, dat ze soms toch juist niet worden gebruikt, om aan te geven, wat ze als zoodanig voorstellen (zooals b.v. boven bij zuil wel het geval was). Zoo is de papyrusrol determinatief voor iets abstracts, maar een concrete papyrusrol wordt geschreven als *šfdw* met een koord als determinatief.

γ) Wanneer een bepaald teeken in een bepaald verband heel vaak bij een bepaald woord als determinatief dient, dan kan zich het verschijnsel voordoen, dat het met weglating van de consonanten, die het determineerde, als aanduiding van dat woord

---

[1]) š, voorgesteld door een vijver, komt overeen met de Engelsche *sh*.

wordt gebruikt. Een merkwaardig en belangrijk voorbeeld hiervan heeft men in de mathematische terminologie, waar een zegswijze, die wij b.v. weergeven door „deel 17 op 2” wordt uitgedrukt door *nìś* 17 *ḥnt* 2, letterlijk: *roep* 17 *te voorschijn uit* 2. Het determinatief van *nìś* is een man, die de hand aan den mond brengt (tevens determinatief voor „zwijgen”, „spreken” enz.). Nu wordt soms [1]) die man alleen geteekend, om dien bepaalden mathematischen terminus aan te duiden. Het is alsof de voorliefde voor een beeldenschrift, waaraan het heele systeem der hieroglyphen zijn ontstaan te danken heeft hier, op de hoogtepunten van de ontwikkeling van dit systeem, weer tot het uitgangspunt, het ideogram (maar nu niet meer in letterlijken zin afbeeldend gebruikt), terugvoert.

δ) Een ander symptoom voor diezelfde voorliefde kan men ontwaren in het zeer veelvuldige gebruik van determinatieven ook daar, waar ze ter verzekering van de ondubbelzinnigheid in het geheel niet noodig zijn; woorden zonder determinatieven zijn betrekkelijk zeldzaam. Het lijdt nauwelijks twijfel, dat hierbij ook aesthetische overwegingen invloed uitoefenen: de Egyptenaar schept blijkbaar behagen in zijn hieroglyphische kalligraphie: hij houdt van de vaak fraaie en steeds suggestieve teekentjes, waaruit zijn schrift bestaat en hij beijvert zich dan ook steeds, deze zoo regelmatig en sierlijk mogelijk te rangschikken.

We spraken tot dusver uitsluitend over het hieroglyphenschrift (van *ἱερός* = heilig en *γλύφω* = graveeren), zoo genoemd, omdat het in lateren tijd bijna alleen voor inscripties op gewijde gebouwen werd gebruikt. Dit is echter slechts een van de drie schriftvormen, die in Egypte hebben bestaan. In de eerste plaats ontwikkelde zich in het practische gebruik van de hieroglyphen bij het schrijven op papyrus een afgekorte en cursieve schriftvorm, het hierastisch (*ἱερατικός* = priesterlijk), zoo genoemd, omdat het in den Grieksch-Romeinschen tijd het gebruikelijke schrift van de priesters was. Hieratisch is thans een verzamelnaam voor alle oudere schriftvormen, waarin de oorspronkelijke vorm van de teekens niet meer duidelijk herkenbaar is. Later is een nog meer

---

1) Zie b.v. Papyrus Rhind, ed. Chace. Vol. II, Plate V.

vereenvoudigde vorm, het demotisch (δημοτικός = volks-) ontstaan.

We zullen hier op de eigenaardigheden van het hieratische schrift niet ingaan, omdat men, zooals boven reeds werd opgemerkt, als niet-Egyptoloog, bij de bestudeering van een papyrus toch moet uitgaan van de hieroglyphische transcriptie. De belangstellende lezer zal echter met behulp van de bij dit artikel behoorende afbeeldingen een indruk van een hieratisch geschreven tekst kunnen krijgen en door vergelijking met de hieroglyphische transcriptie desgewenscht kennis kunnen nemen van de wijze, waarop de oorspronkelijke teekens in het practische gebruik langzamerhand zijn ontaard.

§ 3. Notatie en techniek der Egyptische arithmetica.

We maken thans enkele opmerkingen over de Egyptische arithmetica, niet met de bedoeling, hiervan een volledig beeld te schetsen, maar slechts om den lezer voldoende voor te bereiden op de te behandelen problemen.

Het Egyptische getallensysteem is een additief geschreven decimaal systeem; er zijn zeven speciale teekens voor de opvolgende machten 10^n ($n = 0 \ldots . 6$), die elk zoovaak herhaald worden als de correspondeerende coefficient in de dekadische ontwikkeling van het voor te stellen getal aangeeft. De zoo verkregen groepen worden door iuxtapositie in volgorde van afnemende grootte der gebruikte eenheid additief verbonden.

We zullen in de meegedeelde voorbeelden geen andere teekens voor machten van 10 ontmoeten dan

𓏺 voor 1.
𓎆 voor 10.
𓍢 voor 100.

𓎆 is afgeleid uit een teeken 𓎅, dat een kniehalster voor vee voorstelt, daardoor ideogram of determinatief bij *mḏt*, stal, is geworden en daardoor weer phonogram in *mḏw* = tien.

𓍢, een bos touw, is phonogram voor *šn*, waarmee wellicht het woord *št* of *šnt* voor honderd verwant is; misschien is het teeken echter ook als soort ideogram op te vatten, namelijk, wanneer het beschouwd wordt als een afbeelding van het gebruikelijke maatkoord van 100 el.

Met behulp van deze teekens wordt nu dus b.v. het getal 456 als volgt geschreven:

R 32.[1]) 9999 ∩∩∩∩∩ IIIIII

Op het gebied van de breuken bestaan (met één dadelijk te noemen uitzondering) alleen symbolen voor stambreuken; deze worden geschreven door boven het getal, dat wij den noemer noemen, in hieroglyphisch schrift het teeken 𓂋 te plaatsen en in hieratisch schrift een stip. De eenige uitzondering in den tijd, waaruit de papyrus Rhind afkomstig is, vormt de complementbreuk $\frac{2}{3}$ die hieroglyphisch door het symbool 𓂚 wordt aangeduid. We zullen in de transliteratie de reeds veel toegepaste methode volgen, de stambreuk $\frac{1}{n}$ voor te stellen door $\overline{n}$ en de breuk $\frac{2}{3}$ door $\overline{\overline{3}}$.

Op de historisch-mathematische problemen, die in de Egyptische breukrekening verborgen liggen, gaan we hier niet in; in de te behandelen voorbeelden komen geen berekeningen voor, voor welker begrip de kennis van die problemen noodig is.

Het karakter der Egyptische rekenkunde kan, voorzoover daarin geen andere dan natuurlijke getallen optreden, kort worden aangegeven met twee kenwoorden: het is additief en dyadisch. Hiermee wordt het volgende bedoeld:

Dat van de vier hoofdbewerkingen der rekenkunde de optelling de eigenlijk fundamenteele en de eenig zelfstandige is, omdat de aftrekking uit haar door omkeering, de vermenigvuldiging door herhaling en de deeling weer door omkeering uit deze wordt afgeleid, is een inzicht, dat bij voortgaande ontwikkeling der mathematische techniek weliswaar in beginsel bij iederen rekenaar aanwezig is, maar waarvan hij zich bij de practische uitvoering der verschillende bewerkingen vaak nauwelijks meer bewust is. Dit inzicht is nu in de practijk der Egyptische arithmetica nog volkomen levend: alle bewerkingen worden nog duidelijk gevoeld als varianten van de optelling en in dien zin kan men van een additief karakter van het Egyptische rekenen

---

[1]) We gebruiken dit verder als afkorting voor: Papyrus Rhind, Probleem 32.

spreken. Wanneer wij b.v. vragen: „hoeveel is tien min zeven?", zal de Egyptenaar die vraag formuleeren, zooals men ze thans nog aan kinderen stelt: „wat moet men bij zeven doen, om tien te krijgen", of korter: „zeven plus hoeveel is tien?" Zeven maal acht voelt hij nog heel duidelijk als acht + acht + acht + acht + acht + acht + acht en de opgave, om vierentwintig door zes te deelen beduidt voor hem niets anders dan de vraag, hoeveel termen hij in de som zes + zes enz. moet nemen, om vierentwintig als uitkomst te krijgen.

Het voorafgaande eischt op enkele punten wezenlijke aanvullingen en beperkingen:

a) een eerste stap op den weg, waarlangs de vermenigvuldiging zich zal ontwikkelen tot een practisch autonomen algorithmus, wordt reeds in de Egyptische arithmetica gedaan, doordat de verdubbeling als zelfstandige bewerking wordt ingevoerd en gebruikt. Zoo rekent men het product zeven maal acht niet uit door werkelijk langs den weg der gewone optelling de som van zeven termen acht te bepalen, maar door in plaats daarvan te berekenen: $1.8 + 2.8 + 4.8$, de som dus van drie termen, waarvan elke door verdubbeling uit de voorafgaande ontstaat. Algemeen geformuleerd komt dit hierop neer, dat men ter berekening van het product $a \,.\, b$ een der factoren dyadisch ontwikkelt

$$a = \sum_{0}^{n} {}_i\, c_i 2^i \qquad c_i = 0 \text{ of } 1$$

en nu het gevraagde product vindt als

$$a \,.\, b = \sum_{0}^{n} {}_i\, c_i \,.\, 2^i b.$$

Als voorbeeld vermelden we een berekening uit den papyrus-Rhind, waar 12 . 12 moet worden gevonden

R 32.	1	12
	2	24
	⁄4	48
	⁄8	96
	Totaal	144.

Gewoonlijk wordt door het vooraanplaatsen van streepjes aangegeven, welke termen men ten slotte op moet tellen (dus voor welke waarden van i $c_i = 1$).

b) Volgens denzelfden gedachtengang worden nu opgaande

deelingen uitgevoerd. De vraag, die wij b.v. zouden formuleeren als: deel 117 door 9, wordt namelijk gevoeld als: tel, te beginnen met negen, zoo vaak negen bij het verkregen getal op, tot men 117 als uitkomst vindt", of, als men dit herhaald optellen vermenigvuldigen noemen wil: „vermenigvuldig 9 met een zoodanigen factor, dat het product 117 wordt". Dit wordt nu ook weer dyadisch afgekort, zoodat de berekening als volgt verloopt:

/1	9
2	18
/4	36
/8	72

Totaal (wij zouden zeggen: quotient): $1 + 4 + 8 = 13$.

Algemeen geformuleerd: ter berekening van het quotient $b : a$ tracht men b te schrijven in den vorm:

$$b = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, c_i \,.\, 2^i a \qquad c_i = 0 \text{ of } 1$$

Het gevraagde quotient is dan

$$\frac{b}{a} = \sum_{0}^{n}{}_{i}\, c_i 2^i.$$

De onder *a*) en *b*) vermelde eigenschappen der Egyptische rekenkunde geven aanleiding, om van een dyadisch-additief karakter te spreken. In de practijk zal dit zich o. a. hierin hebben geopenbaard, dat de Egyptische rekenaar geen tafels van vermenigvuldiging behoefde te kennen, maar wel van vele getallen vlot het dubbele zal hebben moeten kunnen noemen.

c) De regelmaat van het dyadische rekenschema wordt niet zelden onderbroken door het optreden van een dekadisch element: de vermenigvuldiging van een getal met tien wordt namelijk onmiddellijk uitgevoerd en niet vervangen door de optelling van het tweevoud en het achtvoud van dat getal. Dit hangt ongetwijfeld samen met het feit, dat tien de basis van het getallensysteem is en met de additieve schrijfwijze der getalsymbolen: om b.v. ∩∩III met tien te vermenigvuldigen, heeft men slechts elk teeken te vervangen door dat van de eenheid, die een trap hooger staat en dus te schrijven 99∩∩∩. Moet men nu b.v. 80 met 14 vermenigvuldigen, dan kan men schrijven

R 69.	1	80		1	80
	/ 10	800		/ 2	160
	2	160	in plaats van	/ 4	320
	/ 4	320		/ 8	640
	Totaal	1120		Totaal	1120.

d) een andere bijzonderheid is nog, dat uit het tienvoud van een getal vaak door halveering het vijfvoud wordt afgeleid, zoodat b.v. 16 . 16 als volgt berekend kan worden:

K 6.[1])	/ 1	16
	/ 10	160
	/ 5	80
	Totaal	256.

Deze opmerking behoort reeds eenigszins thuis op het gebied der breukrekening, waarover we thans nog iets moeten zeggen.

Het is wiskundig onmiddellijk duidelijk, dat bij invoering van breuken het dyadisch karakter der arithmetica niet langer zuiver gehandhaafd zal kunnen blijven en dat dus de halveering, hoewel als zelfstandige bewerking fungeerend, hier niet een even sterk op den voorgrond tredende positie zal kunnen innemen, als de verdubbeling dat bij de bewerkingen op natuurlijke getallen deed: immers het is wel mogelijk, om elk *natuurlijk* getal, maar niet om elk *rationaal* getal in eindigen dyadischen vorm te schrijven[2]). Het gevolg is, dat in de breukrekening behalve met de breukdeelen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ enz. van een getal, ook veel gerekend wordt met de deelen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ ervan, waarbij het eigenaardig is, dat men, om het derde deel van een getal te bepalen, vaak eerst het tweederde deel opschrijft en dit vervolgens halveert[3]). Bovendien

---

[1]) D. w. z. Probleem 6 uit de Kahun Papyri, gepubliceerd door Griffith, *Hieratic Papyri from Kahun and Gurob.* London 1898.

Geciteerd bij Neugebauer, *Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter.* Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. B. I, 325.

[2]) We denken hierbij natuurlijk aan de schrijfwijze

$$a = \sum_{-n}^{m} {}^{i} c_i 2^i$$

waarin c_i een der waarden 0 en 1 kan hebben.

[3]) Hiermee is nog niet gezegd, dat men ook werkelijk altijd eerst het $\overline{\overline{3}}$ deel uitrekende, om door halveering het $\overline{3}$ deel te vinden. De Egyptenaren waren best in staat, om zuiver formeele redenen te blijven volhouden aan de volgorde $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, waar ze geen reëele beteekenis meer had, wanneer ze maar eenmaal om een of andere reden (die ons onbekend is) traditioneel was geworden.

uit zich ook hier de invloed van de basis 10 van het getallensysteem, doordat men ook vaak het tiende deel van een getal neemt (waaruit door verdubbeling het vijfde deel ontstaat).

Hier volgen enkele voorbeelden.

R 24.	19 : 8	**R 25.**	16 : 3	**R 21.**	4 : 15
1	8	/ 1	3	1	15
/ 2	16	2	6	$\overline{10}$	$1+\bar{2}$
$\bar{2}$	4	/ 4	12	/ $\bar{5}$	3
/ $\bar{4}$	2	$\bar{\bar{3}}$	2	/ $\overline{15}$	1
/ $\bar{8}$	1	/ $\bar{3}$	1		
Quotient	$2+\bar{4}+\bar{8}$	Quotient	$5+\bar{3}$	Quotient	$\bar{5}+\overline{15}$

Op de veel moeilijkere berekeningen, waarbij door een breuk of een som van breuken moet worden gedeeld, behoeven we in verband met het doel van dit opstel niet uitvoerig in te gaan. Ze komen slechts incidenteel ter sprake in een opmerking, die we nog te maken hebben over de toepassing van de z.g. hulpgetallen in de breukrekening. De aard van dit zeer belangrijke hulpmiddel zal het gemakkelijkst uit eenige voorbeelden blijken.

In R27 moet 21 gedeeld worden door $1+\bar{5}$; of, Egyptisch uitgedrukt, men moet $1+\bar{5}$ zoolang vermenigvuldigen, tot men 21 als uitkomst krijgt. Men schrijft nu

$$\begin{array}{cc} \bar{5} & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{5} \end{array}\Big\} \; \mathbf{6} \qquad \begin{array}{ll} /\,1 & \mathbf{6} \\ /\,2 & \mathbf{12} \\ /\,\bar{2} & \mathbf{3} \\ \text{Totaal} & 3+\bar{2} \end{array}$$

R 27.

$$\begin{array}{ll} /\,1 & 3+\bar{2} \\ 2 & 7 \\ /\,4 & 14 \\ \text{Totaal} & 17+\bar{2} \end{array}$$

We zullen hier niet ingaan op de discussie van de verschillende interpretaties, die van deze redeneering gegeven zijn en volstaan dus met de mededeeling van één opvatting, die ook aan de toelichting der te behandelen problemen ten grondslag zal worden gelegd:

Men voert als hulpeenheid inplaats van 1 de breuk $\bar{5}$ in; de gegeven getallen $\bar{5}$ en 1 worden dan opv. geschreven als 1

en 5[1]). Som 6. Deel nu 6 op 21. Quotient $3 + \overline{2}$. Vermenigvuldig dit weer met 5, om tot de oorspronkelijke eenheid terug te keeren. Resultaat $17 + \overline{2}$.

Dat deze opvatting althans mogelijk is (haar hooge waarschijnlijkheid te betoogen, zou hier te ver voeren[2]), kan worden aangetoond door haar toepasbaarheid in het volgende, veel meer gecompliceerde voorbeeld:

In R 32 wordt gevraagd 2 te deelen door $1 + \overline{3} + \overline{4}$.

Deze berekening verloopt als volgt[3]):

	$/ 1$	$1 + \overline{3} + \overline{4}$	
		[**144** + **48** + **36** =]	**228**
	$\overline{\overline{3}}$	$1 + \overline{18}$[4])	
		[**144** + **8** =]	**152**
	$\overline{3}$	$\overline{2} + \overline{36}$	
		[**72** + **4** =]	**76**
R 32.	$/ \overline{6}$	$\overline{4}$ $\overline{72}$	
		[**36** + **2** =]	**38**
	$/ \overline{12}$	$\overline{8}$ $\overline{144}$	
		[**18** + **1** =]	**19**
		[Totaal	**285.**
		2	**288.**
		Rest	**3.**]
	$/ \overline{228}$	$\overline{144}$ **1**	
	$/ \overline{114}$	$\overline{72}$ **2**	

Het gevraagde quotient is $1 + \overline{6} + \overline{12} + \overline{114} + \overline{228}$.

Dit is nu als volgt te verklaren: als nieuwe eenheid wordt ingevoerd de breuk $\overline{144}$; de vet gedrukte getallen geven nu aan, welke waarde elk voorkomend getal in deze nieuwe eenheid

---

1) Men ziet hieruit, hoe sterk getallen nog worden gevoeld als aantallen eenheden van een of andere physische grootheid, een lengte, een volume, een gewicht of iets derg.

2) Zooals steeds kan ook hiervoor naar de werken van Neugebauer verwezen worden.

3) Wat tusschen [ ] staat, is ter verduidelijking aangevuld.

4) Waarschijnlijk ingezien door met hulpeenheid 12 te schrijven

$1 + \overline{3} + \overline{4}$		
[**12** + **4** + **3** =]	**19**	
1 **19**		
$\overline{\overline{3}}$ **12** $\overline{\overline{3}}$		dus $1 + \overline{18}$.

heeft; het doel is 288 van die nieuwe eenheden te verkrijgen. Beschouwt men de aangestreepte termen, dan is de som 285. Er komen dus 3 eenheden te kort. Daar nu de deeler, in de nieuwe eenheid uitgedrukt, de waarde 228 heeft, moet men $\overline{228} + \overline{114}$ hiervan nemen, om die 3 ontbrekende eenheden te krijgen. De waarden van die breukdeelen zijn, in de oude eenheid uitgedrukt, opv. $\overline{144}$ en $\overline{72}$, maar dit doet eigenlijk niets ter zake.

Bij nader onderzoek blijkt, dat de hulpgetallen ook nog wel een andere functie vervullen dan de hier geschetste; voor ons doel zal het bovenstaande echter voldoende zijn.

We kunnen thans tot de reproductie en verklaring van drie problemen uit den papyrus overgaan.

§ 4. **Probleem 22. Blad 45.** [Zie reproductie I.]

Regel 1. Men leest hier (van rechts naar links!)

śkm m $\overline{\overline{3}}$ $\overline{30}$ *m* 1.

ś (emphatische *s*) wordt voorgesteld door een uniliteraal phonogram, dat een opgevouwen laken voorstelt. Het oorspronkelijke woord hiervoor is onbekend.

Het daarop volgende teeken, een stuk krokodillenhuid, is phonogram voor *km*; de *m* is in de gedaante van een uil hierbij nog eens apart vermeld als phonetisch complement.

Aan het woord *śkm* is toegevoegd de papyrus-rol als determinatief voor een abstractum. De vertaling luidt: „vul aan, maak compleet"[1]). Het hierop volgend teeken, bestaande uit de uil en een menschelijken onderarm, stelt een partikel voor, dat men soms achter imperatieven vindt en dat geen Nederlandsch aequivalent heeft. De arm stelt in dit verband geen afzonderlijken klank voor[1]).

Hierna leert men de breuken $\overline{\overline{3}} + \overline{30}$, terwijl de dan volgende *m* de z.g. aequivalentie-*m* is, die in wiskundig verband het best kan worden weergegeven door „gelijk aan"[2]).

---

[1]) Chace II. Noot 1 bij Probleem 21. Plaat 44.

[2]) Gardiner, l.c. (noot 2). § 38. De Egyptenaren zeggen niet: „je bent mijn vriend", maar iets wat, letterlijk vertaald, zou luiden: „je bent in de positie van mijn vriend". Dit „als" wordt door een *m* uitgedrukt, die in dit verband de aequivalentie-*m* heet.

De opgave luidt dus: *vul* $\overline{3} + \overline{30}$ *aan tot 1*, d. w. z. bepaal het verschil $1 - (\overline{3} + \overline{30})$. De redeneering wordt voortgezet op

Regel 2. Men vindt hier onder de breuken $\overline{\overline{3}} + \overline{30}$ de hulpgetallen 20 en 1 geschreven, die op te vatten zijn als waarden van die breuken in de hulpeenheid $\overline{30}$.

Regel 3. De transliteratie luidt

*dmd ‘ꜣw f m*9.

Het eerste teeken stelt eenige ineengeknoopte stukjes laken voor. Het komt voor als ideogram met phonetische aanvulling in *dmdî*, vereenigen, en staat hier voor het zinverwante woord „totaal”. De hand, die dan volgt, is het phonetisch complement *d*.

Hierna ziet men een groep van 3 houten kolommen. Zulk een kolom heet *‘ꜣ*, waardoor het teeken phonogram voor *‘ꜣ* kon worden, b.v. in , ‘3, groot. Het beteekent hier in zijn drievoudige herhaling zoo iets als „overschot, exces”. De *w* is meervoudsuitgang. Dan volgt de gekroonde adder, de letter *f*, die hier den derden persoon mannelijk enkelvoud van het persoonlijk voornaamwoord aanduidt. Dit treedt hier op als suffix-pronomen in de beteekenis „van hem”, dus eigenlijk als bezittelijk voornaamwoord [1]); vervolgens weer de aequivalentie-*m*.

Er staat dus:

Het totaal van het exces hiervan is gelijk aan negen.

Inderdaad verschilt de som $\overline{\overline{3}} + \overline{30}$, uitgedrukt in de hulpeenheid $\overline{30}$, 9 van die eenheden van de oorspronkelijke $1 = 30$ hulpeenheden.

Regel 4. *wꜣḥ-tp m* 30 *r gm*[*.t*] 9

Men ziet hier eerst een wisscher, gemaakt uit een vezelstreng; het teeken treedt als phonetisch aangevuld ideogram op in , *śk*, vegen, is daardoor phonogram geworden voor *sk* of *śk* en, om een onbekende reden, ook voor *wꜣḥ*. De *ḥ*,

1) Gardiner § 34; 35, 1.

om een eveneens onbekende reden voorgesteld door een vezelstreng, is als phonetisch complement toegevoegd; bovendien komt het determinatief voor een abstractum voor.

Het hoofd in profiel is oorspronkelijk ideogram voor hoofd (*tp*), daardoor phonogram voor *tp* in de beteekenis van de praepositie „op" in sommige zinnen. De geheele uitdrukking *w3ḥ-tp* is een technische mathematische term, waarvan de letterlijke beteekenis oorspronkelijk geweest is: „buig het hoofd over"[1]), maar die in wiskundig verband door „operate on" (vertaling van Chace), „reken met", kan worden weergegeven. Dat opereeren of rekenen bestaat dan in herhaald dyadisch (eventueel decimaal) optellen, wat weer neerkomt op vermenigvuldigen. Hier beduidt het dus: „vermenigvuldig".

Op dezen imperatief volgt weer de onvertaalbare *m*, ditmaal zonder onderarm; dan staat er de mond (*r*), dien we even overslaan, daarna een vogel, waarschijnlijk een ibis, *gmt*. Het teeken werd phonogram voor de lettergroep *gm*; de *m* is nog eens herhaald als phonetisch complement; de *t* is door den uitgever aangevuld, omdat de bedoeling blijkbaar is, dat er de infinitief staat van het verbum *gmỉ*, vinden[2]). De praepositie *r* duidt in dit verband een doel aan: *r gmt = voor het vinden van.* De heele zin, letterlijk vertaald, luidt dus: *reken met 30, om 9 te vinden*; d. w. z. vermenigvuldig 30 zoolang, tot men 9 heeft; dus: bepaal welk deel men van 30 moet nemen om 9 te krijgen. De berekening staat in de kolom, die in het facsimile het opschrift *a* draagt; ze moet weer van boven naar beneden gelezen worden en luidt dan als volgt:

1	30
/ $\overline{10}$	3
/ $\overline{5}$	6

1) Gardiner § 338. K. Vogel *(Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik in ihrem Zusammenhang mit der 2 : n Tabelle des Papyrus Rhind.* München (Beckstein) 1929 p. 11) ziet hierin een aanwijzing, dat het rekenen in zijn eenvoudigsten vorm aanvankeiijk door hoofdbewegingen zou zijn begeleid, b.v. op deze wijze, dat bij het tellen van een aantal dingen telkens na het bereiken van een hoogere eenheid een knik met het hoofd werd gegeven, waarop dan een ander moest letten. De juiste verklaring van den terminus w3ḥ . tp is echter nog een omstreden punt.

2) Gardiner § 304, 3.

Daar $3+6=9$, blijkt men van 30 $\overline{10}+\overline{5}$ te moeten nemen, om 9 te krijgen. Dit wordt uitgedrukt door de conclusie 9, *dmd* 9.

Het teeken , eigenlijk alleen determinatief voor een abstractum, is een in wiskundige teksten gebruikelijke afkorting voor het in regel 3 voluitgeschreven woord „totaal"; men heeft hier weer een treffende illustratie van de boven in opmerking γ van § 2 vermelde eigenaardigheid van het Egyptische schrift.

In de kolom *b* leest men nu:

ḫr $\overline{5}$ $\overline{10}$ *m* *w3ḥ* *ḥr . f*

ḫr, dus, bestaat uit een symbool ⊜ voor *ḫ*, dat waarschijnlijk een menschelijke placenta (*ḫ*) voorstelt en daardoor phonogram voor *ḫ* is geworden, en uit den mond voor *r*. Op de aequivalentie-*m* volgt weer de technische term *w3ḥ*, nu aangevuld met *ḥr*; het hoofd en face heet zelf *ḥr*; vandaar het gebruik van dit teeken als phonogram voor *ḥr* = op; de *r* is phonetisch complement. De beteekenis is nu „optellen" in den eigenlijken zin van het woord. De *f* staat als suffix-pronomen achter de praepositie *ḥr*; beteekenis: erbij. Er staat dus:

dus $\overline{5}+\overline{10}$ *is gelijk aan het erbij op te tellen bedrag.*

Regel 2 bevat de conclusie:

ḫr *km* $\overline{\overline{3}}$ $\overline{5}$ $\overline{10}$ $\overline{30}$ *r* 1

d. w. z. *dus is compleet* $\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{10}+\overline{30}$ tot 1.

Het zal opvallen, dat hier voor „compleet zijn" *km* staat, terwijl in regel 1 *śkm* stond voor „maak compleet"; men heeft hier een voorbeeld van de causatieve beteekenis van het praefix *ś* [1]).

§ 5. **Probleem 24. Blad 47.** [Zie reproductie II].

Als tweede voorbeeld reproduceeren we het eerste van de problemen, die in de oudere historische litteratuur als de *hau*-problemen bekend staan. Hierin wordt de waarde gevraagd van een onbekende grootheid, wanneer een zekere betrekking gegeven is, waaraan die grootheid moet voldoen. Het zijn dus verge-

---

1) Gardiner § 275.

lijkingen met een onbekende; deze onbekende wordt steeds aangeduid door het symbool



dat als volgt is samengesteld: , de mast van een schip voorstellend, is triliteraal symbool voor *‘h‘*, waaraan de onderarm, die den klank ‘ voorstelt, nog eens als phonetisch complement is toegevoegd. , een hoop koren, is determinatief voor een aantal dingen; de drie verticale strepen determineeren een veelheid (die niet noodzakelijk ook grammaticaal door een meervoud behoeft te worden uitgedrukt); de papyrus-rol bepaalt het abstracte karakter van het afgebeelde begrip.

Men gaf nu vroeger als transliteratie van dit symbool *hw* (*w* als meervoudsuitgang), wat in het Duitsch gevocaliseerd werd als *hau* en vertaald door *Haufen*. Tegenwoordig schrijft men òf *‘h‘w* òf *‘h‘*, in het laatste geval aannemend, dat de twee veelheidsdeterminatieven niet op den grammaticalen numerus betrekking hebben. De vocalisatie wordt dan *aha* en de meest voor de hand liggende vertaling zou zijn „verzameling”: een veelheid van dingen, in abstracto tot een eenheid samengevat. We zullen het woord verder weergeven door hoeveelheid of onbekende.

Men leest nu in regel 1:

‘h‘ $\overline{7}$ *f ḥr . f ḫpr . f m* 19

De vertaling hiervan zal nu met behulp van het boven reeds meegedeelde spoedig duidelijk zijn: men vindt driemaal het suffix-pronomen *f* en wel in de drie voornaamste beteekenissen, die het hebben kan[1]: 1) als genitief achter een substantief in de beteekenis van een bezittelijk voornaamwoord; 2) achter de praepositie *ḥr* in de beteekenis „erbij”; 3) als nominatief achter een werkwoordsvorm. Over *ḫpr*, worden, werd reeds gesproken in § 2. Er staat dus te lezen:

een hoeveelheid, $\overline{7}$ *ervan erbij; het wordt* 19.

---

[1]) Gardiner § 35.

De berekening verloopt nu als volg:

/ 1	7
/ $\overline{7}$	1.
1	8.
/ 2	16.
$\overline{2}$	$\overline{4}$.
/ $\overline{4}$	$\overline{2}$.
/ $\overline{8}$	$\overline{1}$.
/ 1	$2+\overline{4}+\overline{8}$.
/ 2	$4+\overline{2}+\overline{4}$.
/ 4	$9+\overline{2}$.

Over de interpretatie hiervan bestaat veel meeningsverschil. Sommigen zien er een toepassing in van de z.g. *regula falsi:* in de onderstelling, dat de onbekende grootheid 7 zou zijn, vindt men voor die grootheid plus een zevende deel ervan 8; men moet 8 vermenigvuldigen met $(2+\overline{4}+\overline{8})$, om 19 te krijgen; dus is de werkelijke waarde van de onbekende $7(2+\overline{4}+\overline{8}) = 16+\overline{2}+\overline{8}$. Meer natuurlijk en ongedwongen lijkt het, om met Neugebauer[1]) aan te nemen, dat de Aegyptische rekenaar, behoudens vormverschil, niet anders te werk gaat, dan wij bij de oplossing van de vergelijking

$$x+\frac{1}{7}x=19$$

doen. Wij kunnen zeggen $\frac{8}{7}x=19$, dus $x=\frac{7}{8}\cdot 19=7\cdot\frac{19}{8}$.

In overeenstemming hiermee wordt in den papyrus 19 door 8 gedeeld (Egyptisch: 8 zoolang vermenigvuldigd, tot men 19 heeft), waarna het quotient met 7 wordt vermenigvuldigd. Men heeft hiertegen wel als bezwaar aangevoerd, dat het in dit geval meer voor de hand liggend zou zijn, eerst 7 . 19 te berekenen en dit product door 8 te deelen, maar, gezien de vlotheid en de voorliefde, waarmee de Egyptenaren met eenvoudige stambreuken werken, is het zeer de vraag, of die berekening, Egyptisch geformuleerd, inderdaad wel gemakkelijker is. Bovendien echter zijn er gevallen bekend[2]), waarin gehandeld wordt op een wijze, die in ons

---

[1]) Neugebauer, l.c. 305 seq.
[2]) Hiertoe hoort o. a. het in § 3 behandelde probleem R 32.

voorbeeld zou neerkomen op rechtstreeksche deeling van 19 door $1+\overline{7}$; hier is de analogie met den tegenwoordigen gedachtengang al heel opvallend, al is er juist meer verschil dan boven met den tegenwoordigen algorithmus.

In de kolom *a* vindt men een recapitulatie van het gevonden resultaat. Men leest er

ỉr . t   mỉ   ḫpr

Hierin is *ỉr-t* infinitief van *ỉrỉ*, doen; het teeken , een melkemmer in een net voorstellend, is phonogram voor *mỉ*; de *ỉ*, door een rietblad voorgesteld, is phonetisch complement. De letterlijke vertaling is ongeveer: *het doen, zooals het wordt*; wij zouden kunnen schrijven: de oplossing luidt dus als volgt:

‘ḥ‘	$16+\overline{2}+\overline{8}$
$\overline{7}$	$2+\overline{4}+\overline{8}$
dmd	19

Dit heeft den vorm van een proef op de som, maar ook niet meer dan den vorm. Het zevende deel van $16+\overline{2}+\overline{8}$ is blijkbaar niet zelfstandig berekend, maar eenvoudig uit de vorige kolom overgeschreven. Over *dmd* = *totaal* werd reeds gesproken bij Probl. 22.

§ 6. **Probleem 41. Blad 63.** [Zie reproductie III]

Als derde en laatste voorbeeld geven we een meetkundig probleem: de berekening van den inhoud van een cylindrisch graanreservoir, wanneer de diameter van het grondvlak 9 el is en de hoogte 10 el. Vele van de hierbij gebruikte symbolen zullen na het voorafgaande geen commentaar meer behoeven.

Regel 1 bevat eerst de bijna geheel in rood geschreven opgave

tp   n   ỉr-t   šꜣ‘   dbn   n   9   10.

Hierin heeft *tp*, een hoofd in profiel met streep, dat dus eigenlijk „hoofd" moest beteekenen, de blijkbaar traditioneele beteekenis van „voorbeeld". *n ir . t* = van het maken, waarmee bedoeld wordt: van het berekenen van den inhoud.

Daarna volgt een afbeelding van een vijver met lotosbloemen, waarvoor de term *šꜣ* is; hier staat het teeken als phonogram voor *šꜣ* met *ꜣ* als phonetisch complement in *šꜣ‘*, door Chace

vertaald als „granary"; ⊏⊐, een huis, is determinatief voor gebouwen.

Het dan volgend teeken is o.a. ideogram voor „ronddraaien" en verwante begrippen; hier beduidt het „rond". De dan volgende *n* is geen phonetisch complement maar is als „van" te lezen. De cirkel om 9 duidt aan, dat 9 diameter is van het cirkelvormige grondvlak. De beteekenis van den zin is *voorbeeld van het maken van eén rond graanreservoir van 9 bij 10.*

Regel 1 bevat verder de woorden

ḫb . ḫr . k 9 *n* 9 *m* 1 *ḏꜣ . t* 8

ḫb . ḫr . k. Hierin is *ḫb*, met het determinatief × voor „breken", de stam van het werkwoord wegnemen, verminderen; het suffix-pronomen *k* geeft den tweeden persoon mannelijk enkelvoud van het persoonlijk voornaamwoord aan; het tusschengeschoven woord *ḫr* (dat in het algemeen aanduidt, wat er nu komt, dus zoo iets als „dan", „dus", „vervolgens") geeft aan den werkwoordvorm een bevelende futurum-beteekenis. Er staat dus ongeveer het voorschrift: „gij zult wegnemen" of „neem weg". De *m* duidt aequivalentie aan; er staat dus:

neem af 9 van 9, *dat is* 1.

Het volgend teeken stelt voor een vuurmaker (*ḏꜣ*), is daardoor phonogram voor *ḏꜣ*; *t* is uitgang voor het vrouwelijk geslacht, III determinatief voor veelheid. Beteekenis: rest. Dus

rest 8.

Regel 2.

wꜣḥ-tp m 8 *r sp.w* 8 *ḫpr . ḫr* 64.

Voor *wꜣḥ-tp m* 8 vonden we reeds de beteekenis: *vermenigvuldig* 8.

Het teeken ⊜, (een met graan bedekte dorschvloer, *spt*) is phonogram voor *sp* met apart vermelde consonanten *s* en *p*, waarvan de eerste wordt voorgesteld door een deurgrendel, de tweede door een stoel. 𓏲 [1]) is een hieroglyphische adaptatie van den hieratischen vorm van het kwartelkuiken en dus, evenals dit, phonogram voor *w* (meervoudsuitgang). Er staat dus:

vermenigvuldig 8 *tot* 8 *malen*; *het wordt dan* 64.

---

[1]) Niet te verwarren met het teeken 𓍢 voor 100.

Regel 2 en 3.

ỉr . ḫr . k wꜣḥ-tp m 64 *r sp* 10 *ḫpr . ḫr . f m* 640.

ỉr-ḫr . k is een vorm van dezelfde constructie als *ḫb . ḫr . k* in regel 1; hier afgeleid van *ỉr*, maken. De zin beduidt dus:

maak de vermenigvuldiging van 64 *tot* 10 *malen*; *het wordt dan* 640.

Vervolgens

dỉ 2 *f ḫr . f ḫpr . ḫr f m* 960.

dỉ wordt voorgesteld door een onderarm met opgehouden hand, ideogram voor geven; met *ḫr . f* erbij beduidt het „erbij geven, optellen". Dus:

tel de helft ervan er bij op; *het wordt dan* 960.

Daarna leest men, rood geschreven,

rḫt . f m ẖꜣr . w

rḫt met determinatieven voor het abstracte en het plurale, beduidt „aantal, bedrag". De beteekenis is hier „inhoud".

ẖ in *ẖꜣr* wordt geschreven met het teeken van den oxyrhynchusvisch (*ẖꜣt*) met *ꜣ* als phonetisch complement en *w* als meervoudsuitgang. De beteekenis is „khar", d. i. een inhoudsmaat, die het teeken van de luipaardhuid als determinatief draagt; wat wellicht daardoor te verklaren is, dat men inhoudsmaten oorspronkelijk in den vorm van zakken had. De zin luidt dus:

de inhoud ervan in khar.

De gevonden inhoud, in *khar* uitgedrukt, wordt nu nog op een andere eenheid omgerekend, nl. op z.g. *viervoudige hekat's*. De *hekat* (vocaliseering van hk̤ꜣt) is een algemeen gebruikelijke korenmaat (groot 4,789 dm^3), terwijl het viervoud hiervan in den Papyrus Rhind voor het eerst als afzonderlijke eenheid optreedt. De betrekking, die deze eenheid met de *khar* verbindt, is

1 *khar* = 5 *viervoudige hekat*

of 20 *khar* = 100 *viervoudige hekat.*

Men vindt de omrekening als volgt uitgevoerd:

ỉr . ḫr . k $\overline{20}$ *n* 960 *m* 48

neem $\overline{20}$ *van* 960, *dat is* 48.

Daarna;

ḥꜣꜣ . t pw r f m 4-*hk̤ꜣ . t šś* 4800 *hk̤ꜣ . t.*

hꜣꜣ . t met het twee-voeten-symbool, dat alle uitdrukkingen van beweging begeleidt is een participium (het z.g. imperfect-actieve) van hꜣi, gaan. Dergelijke participia staan in het Egyptisch, waar wij liever relatieve zinnen gebruiken; hier dus in de beteekenis van „gaande", d. i. „wat gaat". *pw* is een tusschenvoegsel, dat ongeveer te vergelijken is met ons „dat wil zeggen". Er staat dus

d. w. z. wat er ingaat in viervoudige hekat's:

waarna het resultaat, rood geschreven, luidt:

graan 4800 *hekat*.

De hekat wordt hier zuiver ideographisch geschreven met het symbool (een werpstok), gevolgd door de afbeelding van een korenmaat, waar koren uitstroomt. Ongeveer hetzelfde teeken is dan determinatief bij *šś* in de beteekenis van graan, wat zelf geschreven wordt met het teeken van het koord, omdat koord = šś.

Men zal opmerken, dat hierna schijnbaar „48 *hekat*" staat en niet 4800. Het zou echter niet juist zijn „48 *hekat*" te lezen, omdat in dat geval het getal 48 na het teeken voor *hekat* zou moeten staan. Wanneer het getal voorafgaat, dan beduidt het in het hieratische schrift zooveel honderdtallen.

Het slot wordt gevormd door de uitvoering van enkele der in den tekst vermelde berekeningen:

ḳi n śšm . t f

ḳi, gevolgd door een rechtopstaande mummie en het abstractie-teeken, beduidt „vorm, manier". *n* = van.

śš met abstractie-teeken beduidt hier „bewerking". Het wordt geschreven met het teeken van een messenscherper, dat phonogram voor śš geworden is. *t* uitgang voor vrouwelijk geslacht.

Wanneer we de geheele oplossing ten slotte kort samenvatten, dan blijkt ze als volgt te verloopen:

Is de diameter van het grondvlak d en de hoogte van het reservoir h, dan vindt men

inhoud in kubieke ellen: $\left(\frac{8}{9}\ d\right)^2 . h = 640$ kub. ellen.

inhoud in *khar*: $\frac{3}{2} . 640 = 960$ *khar*.

inhoud in (viervoudige) *hekat*: $5 . 960 = 4800$ *hekat*.

Blijkbaar is dus

1 kub. el $= \frac{3}{2}$ *khar* en 1 *khar* $= 5$ *hekat*.

dus 1 kub. el $\doteq 7{,}5$ *hekat*.

De el wordt hierbij gesteld op 523 mm, wat in overeenstemming blijkt te zijn met de boven vermelde grootte van de *hekat*.

Voor π is gebruikt de benadering

$$\frac{1}{4}\pi \sim \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$\text{dus } \pi \sim \frac{256}{81} = 3{,}160\ldots.$$

DE MEETKUNDE ALS INVARIANTENTHEORIE

Openbare les gehouden bij de aanvaarding van het ambt van Privaat-Docent aan de Rijksuniversiteit te Groningen op 20 October 1931

door Dr. O. BOTTEMA.

Dames en Heeren,

Wie na kennisneming en beoefening der meetkunde in de omvang, waarin zij op onze middelbare scholen wordt onderwezen, zich gaat toeleggen op de studie van het uitgebreide en veelzijdige complex der geometrische onderzoekingen, die men tot de zoogenaamde hoogere wiskunde rekent te behooren, komt weldra tot het inzicht, dat, kort gezegd, het woord meetkunde een meervoud heeft.

Het wordt de toekomstige geometer spoedig duidelijk, dat het vak van zijn keuze zich allerminst beperkt tot een uitbreiding en verdieping der elementaire, der Euclidische meetkunde, maar dat het zich voor een tamelijk groot deel bezig houdt met de bestudeering van meetkundige stellingen, die van de hem van ouds bekende principieel verschillen, in deze zin, dat een ander stelsel van axioma's hun fundament is.

Hij leert niet alleen uit de Euclidische premissen steeds verder voerende conclusies trekken en op grond daarvan nieuwe begrippen in te voeren, maar hij bestudeert ook de gevolgtrekkingen uit andere veronderstellingen. Hij leert niet slechts nieuwe methoden om de problemen uit het vroegere gebied aan te vatten, daarbij steunend op andere hoofdstukken der wiskunde, maar hij maakt ook kennis met meetkundige systemen, waarin althans sommige stellingen der Euclidische meetkunde hun zin en geldigheid verliezen.

Gezien van uit het overigens subjectieve standpunt der elementaire meetkunde, zou men de „andere" meetkunden in twee groepen kunnen verdeelen.

Tot de éene groep zou ik willen rekenen die meetkunden

wier axioma's alle of voor een deel *verschillend* zijn van die, welke voor de Euclidische meetkunde gelden. Hiertoe behooren de beide meetkunden, de *hyperbolische* en de *elliptische*, welke men samenvat als de *niet-Euclidische* meetkunde in engere zin. Aan hen ligt een ander parallellen-axioma ten grondslag dan het Euclidische. In de hyperbolische planimetrie gaan er door een punt oneindig vele, in de elliptische geen enkele lijn, die met een gegeven lijn geen punt gemeen heeft. Deze andere premisse voert uiteraard tot andere conclusies. Terwijl in de Euclidische meetkunde de som der hoeken van een driehoek 180° bedraagt, is zij in de niet-Euclidische meetkunde niet standvastig. In de elliptische is de som steeds grooter, in de hyperbolische steeds kleiner dan 180°. Een andere stelling, die een indruk kan geven van het afwijkend karakter dezer meetkunden is die welke uitspreekt, dat in de elliptische meetkunde de rechte lijn eindige lengte heeft. De niet-Euclidische meetkunde heeft een langdurige strijd om het bestaan moeten voeren en haar interessante, dikwijls beschreven historische ontwikkeling, geeft een treffend beeld van de moeite die het gekost heeft om de suprematie van de Euclidische meetkunde, die voor de dagelijksche ervaring zoo zeer de „ware" meetkunde schijnt te overwinnen.

De tweede groep van meetkunden, die van de Euclidische verschillen, bestaat uit systemen, die ten opzichte van haar een geheel andere plaats innemen. Zij bevatten essentieel geen enkele stelling, die in de Euclidische niet geldt en waar misschien op het eerste gezicht een afwijking van een Euclidische waarheid valt te constateeren, daar is deze te verklaren door een verschil in terminologie. We kunnen ons het eenvoudigst deze meetkunden voorstellen als te berusten op sommige, maar niet alle Euclidische axioma's en op geen andere. Er is dus in deze meetkunden nog plaats voor het geheele Euclidische systeem. Deze ruimere meetkunden staan niet naast of tegenover de Euclidische, maar ze zijn er als het ware omheen gebouwd. Het complex der begrippen en stellingen van zoo'n meetkunde is minder uitgestrekt, dan dat der Euclidische, het wordt gevormd door een bepaalde selectie uit de Euclidische verschijnselen. Bekende voorbeelden van dergelijke meetkunden zijn de *projectieve* meetkunde, de *affiene* meetkunde, de *conforme* meetkunde. We merken daarbij nog op, dat de projectieve meetkunde op haar beurt om de affiene meetkunde is heengebouwd en dat men binnen de projectieve meetkunde ook de zoo juist genoemde

niet-Euclidische meetkunde kan onderbrengen. Men zou de projectieve meetkunde kunnen vergelijken met een landstreek met een weinig gedifferentieerde rechtstoestand, waarin bepaalde districten voor hun gebied nadere regelen hebben vastgesteld, die voor de verschillende districten niet gelijkluidend zijn, maar die nooit indruischen tegen de algemeene landswetten. Elke projectieve stelling is ook een die in de Euclidische meetkunde geldt, maar het omgekeerde is niet het geval. De stelling: in elke driehoek is de som der hoeken 180°, geldt niet in de projectieve, maar niet in dien zin dat deze som daar een andere constante waarde zou hebben of niet constant zou zijn. De reden is veelmeer deze, dat het begrip hoekmaat in de projectieve meetkunde niet definieerbaar is. De stelling geldt ook niet in de conforme meetkunde, waar weliswaar het begrip hoekmaat bekend is, maar waar de uitdrukking „rechte lijn" niet wordt verstaan en men bij een „hoek" de figuur van twee snijdende cirkels denkt. De in het projectieve platte vlak geldende stelling: „twee rechte lijnen hebben steeds een punt gemeen", schijnt op het eerste gezicht in strijd met wat ons in de Euclidische meetkunde bekend is. Dit verschilpunt is er een dat berust op een verschil in zegswijze. Om n.l. van de Euclidische of ook van de niet-Euclidische meetkunde uit, te komen tot de projectieve, of van de Euclidische tot de conforme, moet men zich bewust worden van zijn standpunt ten opzichte van het z.g. oneindige. Niet alleen met de hemel, maar ook met het oneindige is het mogelijk een schikking te treffen. Il y a des accommodements avec l'infini.

Men voert daartoe in de Euclidische meetkunde op zuiver formeele wijze z.g. „ideale elementen" in, wat voor het geval van de projectieve meetkunde hierop neerkomt dat men het onderscheid tusschen twee snijdende lijnen en twee parallelle lijnen verdoezelt en beide soorten figuren onder de verzamelnaam snijdende lijnen samenvat. U kunt dit voorbeeld beschouwen als een aanwijzing voor de juistheid van een van Poincaré afkomstige uitspraak: „de wiskunde is de kunst om aan verschillende dingen dezelfde naam te geven."

Het valt ongetwijfeld veel gemakkelijker om een systeem als de projectieve meetkunde te accepteeren, dan om zich met de niet-Euclidische meetkunde te vereenigen. Eenigszins eenvoudig voorgesteld, zou men kunnen zeggen, dat de projectieve geometer zich slechts interesseert voor bepaalde stellingen der Euclidische meetkunde, stellingen die ook nog gelden als men een gedeelte

der Euclidische axioma's weglaat, en welke hij door het gebruik der ideale elementen over 't algemeen eenvoudiger kan redigeeren, dan in de Euclidische meetkunde mogelijk is. Toch heeft de projectieve meetkunde lange tijd noodig gehad om algemeen als een van Euclidische meetkunde onafhankelijk systeem te worden erkend en het moet trouwens worden toegegeven, dat de beginner steeds eenige moeite heeft om in te zien, dat een zuiver projectief begrip als de dubbelverhouding van vier collineaire punten inderdaad van het Euclidische afstandsbegrip onafhankelijk is.

Daar de Euclidische meetkunde doortrokken is van stellingen, die een algemeener karakter hebben, houdt de elementaire geometer zich dus feitelijk ook met de ruimere meetkunden bezig. Zooals men in proza kan spreken, zonder het te beseffen, zoo wordt men b.v. in de hoofdstukken over evenredigheid van lijnstukken of bij de behandeling van verschillende eigenschappen van oppervlakken en zwaartepunten onbewust onderricht in eenige fundamenteele stellingen der affiene meetkunde.

Om een overzicht te krijgen van de verschillende meetkunden, zou het voldoende zijn, elk ervan aan te duiden door het stelsel axioma's, dat haar bepaalt. Maar afgezien van het feit, dat een dergelijke classificatie een zekere overzichtelijkheid zou ontberen, b.v. al hierom, dat verschillende stelsels van axioma's dezelfde meetkunde kunnen opleveren, bestaat het groote bezwaar, dat een veelvuldig toegepaste methode om de geometrie te behandelen, niet rechtstreeks tot haar axioma's afdaalt. Prof. Schaake heeft in zijn dit jaar gehouden inauguratie over de bouw der meetkunde een overzicht gegeven van de twee methoden die de meetkundige ten dienste staan, de *axiomatisch-synthetische* en de *analytische* methode. De laatste is gebaseerd op de axiomatiek en de successen van rekenkunde en algebra, verdere „meetkundige" axioma's zijn voor haar ontbeerlijk, haar definities bestaan uit het geven van meetkundige namen aan rekenkundige grootheden. Wij komen tot de vraag, hoe de onderscheiding der verschillende meetkunden bij een analytische behandeling moet worden gedacht.

Laat ons daarvoor nog eens uitgaan van de Euclidische meetkunde, en laten wij ons afvragen, wat ons aan een meetkundige figuur, b.v. een driehoek, interesseert. Hiertoe behooren allerlei eigenschappen omtrent grootte van zijden en hoeken, merkwaardige punten enz. Maar hiertoe behooren niet al die

eigenschappen welke de driehoek onderscheiden van een, die er congruent mee is. Het is ons onverschillig of de driehoek links of rechts op een bord is geteekend of in een boek gedrukt staat. Dit is zoo vanzelfsprekend, dat zeer dikwijls de begrippen congruent en identiek in elkaar overgaan. Wanneer de leerlingen van een klas ieder een driehoek hebben geteekend en deze driehoeken zijn congruent, dan is het heel gewoon om te zeggen dat ze allemaal „dezelfde" driehoek hebben. En wanneer men opmerkt, dat er maar één driehoek bestaat met drie gegeven zijden, dan is ook bedoeld, dat alle driehoeken met drie gegeven zijden congruent zijn. Het is ook wel duidelijk hoe deze verwarring van congruentie en identiteit kon ontstaan: wanneer men een materieele driehoek verplaatst, dan kan men met recht volhouden, dat men dezelfde driehoek heeft behouden. Maar heeft men zich aangepast aan de zegswijze van den geometer, dat een driehoek bij verplaatsing in een àndere, ermee congruente driehoek overgaat, dan begrijpt men wat het zeggen wil, als men verklaart, dat de elementaire wiskunde zich interesseert voor die eigenschappen der figuur, die een verplaatsing kunnen doorstaan, zonder te veranderen, die zooals men zegt *invariant* zijn ten opzichte van een bewegingstransformatie. Dit alles moge eenigszins gekunsteld lijken bij een elementaire, dat wil dus zeggen, synthetische behandeling der meetkunde, bij de analytische methode komt deze opvatting op natuurlijke wijze voor den dag. In de analytische meetkunde zal men een driehoek het eenvoudigst kunnen aanduiden door de coördinaten van zijn hoekpunten. Een tweede driehoek zal slechts dan congruent zijn met de eerste, wanneer tusschen hun beider hoekpuntscoördinaten zekere relaties bestaan. Het is duidelijk van welke aard deze relaties zijn. Zij zijn blijkbaar niets anders dan de vertaling, in de taal der algebra, van de verplaatsing, die ons synthetisch criterium der congruentie uitmaakt. In de analytische, formeele behandeling komt de congruentie dus neer op het bestaan van zekere uitdrukkingen, door middel waarvan aan de coördinaten van een punt, die van een ander punt worden toegevoegd. Deze uitdrukkingen zijn van de eerste graad en behooren dus tot de eenvoudigste die de wiskundige kent, maar het zijn niet de algemeene lineaire uitdrukkingen en in zoover verschaft het expliciet opstellen van deze vergelijkingen, althans voor ruimten van meer dan twee afmetingen, nog wel eenige moeite.

De stellingen der meetkunde, zuiver analytisch beoefend

worden bewezen door de existentie van bepaalde vergelijkingen en rekenkundige uitkomsten aan te toonen. Waar wij nu de nadruk op leggen is dit, dat slechts die vergelijkingen meetkundige zin hebben, die na toepassing van een willekeurige bewegingstransformatie dezelfde gedaante blijken te hebben behouden. Om een voorbeeld te geven: Op 't eerste gezicht moge het van belang schijnen, dat een der coördinaten van het in het platte vlak gelegen punt {3,0} gelijk nul is. Blijkbaar is dit slechts schijn. Zoodra het vlak aan een bewegingstransformatie wordt onderworpen, zal het punt b.v. overgaan in het punt {5,7} en onze vergelijking blijkt het karakter te hebben van een toevallige coïncidentie. Heeft men twee punten, wier coördinaten $\{x_1,y_1\}$ en $\{x_2,y_2\}$ voldoen aan de vergelijking $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 9$, dan zal na een transformatie blijken dat deze b.v. is overgegaan in $x_1' + y_1' + x_2' + y_2' = 10$ en onze relatie mist het recht om een meetkundige eigenschap te worden genoemd. Beschouwt men echter de vergelijking $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 9$, dan blijkt deze na welke transformatie ook, over te gaan in $(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 = 9$ en zij wordt daarom verheven tot meetkundige stelling.

Elke vergelijking, die zich als meetkundige stelling aanbiedt, moet beproefd worden op haar standvastigheid; doorstaat zij de proef, komt zij ongedeerd uit de transformatiemachine te voorschijn, dan is zij waardig gekeurd om in de rij der stellingen te worden opgenomen.

Vraagt men nu hoe de analytische meetkunde aan de invariante uitdrukking is gekomen, die ik zoo juist noemde, dan moet het voor haar lichtelijk compromitteerende antwoord luiden, dat zij hiertoe leentjebuur gespeeld heeft bij de synthetische, bij de meer op aanschouwing gegronde meetkunde.

Het is n.l. de op de stelling van Pythagoras steunende formule, die uitdrukt dat het kwadraat van de afstand der twee punten 9 is. Wanneer de analytische geometer afstand zou willen doen van alles wat de aanschouwing en de synthetische deductie hem van de figuren hebben geleerd, dan zou hij van elke door hem gevonden relatie tusschen coördinaten steeds opnieuw moeten uitmaken of zij een meetkundige waarheid inhoudt, dan wel niet meer is dan een van de bijzondere keuze van het coördinatenstelsel afhankelijke, toevallige omstandigheid.

Het onderzoek naar de vraag of zijn relatie een bewegingstransformatie kan lijden, zou iets gelijken op een misschien in den aanvang aantrekkelijk, maar spoedig vermoeiend spel met

steeds wisselende uitslag. Het is daarom begrijpelijk dat men er toe is overgegaan een systematisch onderzoek in te stellen naar het geheel der relaties die tegen bepaalde transformaties bestand zijn, en zoo mogelijk een eindig aantal dezer invarianten te vinden, waaruit alle overige zijn op te bouwen. Dit hoofdstuk der algebra heeft zich voornamelijk in de 19e eeuw ontwikkeld en draagt de naam *invarianten-theorie*. Door haar uitkomsten is de analytische meetkunde formeel geheel onafhankelijk geworden van de synthetische. Zij stelt haar in staat uit de verwarrende overvloed der verschijnselen die te kiezen, welke blijvende waarde hebben. De Euclidische meetkunde is, van dit standpunt beschouwd, de invarianten-theorie van zekere transformaties, die wij bewegingstransformaties zullen blijven noemen, maar waarbij alle aanschouwing kan worden gemist.

Zien wij echter onze elementaire meetkunde uit dit oogpunt, dan wordt ons haar zeer betrekkelijke beteekenis duidelijk bewust. De transformatieformules, die de Euclidische beweging representeeren, zijn niet interessanter en zeker ook niet eenvoudiger dan een groot aantal andere formules, waaraan men de coördinaten van een figuur zou kunnen onderwerpen. Het is zelfs wel zeker, dat wanneer daar niet ons synthetisch verleden was, deze formules in geen enkel opzicht onze bijzondere aandacht zouden hebben getrokken. Niets ligt dus meer voor de hand, dan dat de geometer ook andere coördinatentoevoegingen gaat beschouwen, dan die welke wij als het algebraïsch analogon der Euclidische verplaatsing hebben leeren kennen en zich interesseert voor de invarianten van andere transformatieverzamelingen. De uitspraak van Poincaré zou hem daarbij de vrijheid verleenen aan deze andere zaak hetzelfde woord meetkunde te geven. De geometer legt zichzelve hierbij echter zekere restricties op. In zijn nieuw systeem zal hij twee figuren „congruent" noemen, zoodra zijn verzameling transformaties een exemplaar bevat, dat aan de eene figuur de andere toevoegt. Hij blijft nu echter de begrijpelijke eischen stellen, dat ten eerste een figuur congruent is met zichzelve, voorts dat uit de congruentie van A met B volgt de congruentie van B met A en ten slotte dat uit de congruentie van A met B en die van B met C, de congruentie van A met C volgt. Voldoen onze transformaties aan zoodanige analytische voorwaarden, dat het doorgaan van deze stellingen is gewaarborgd, dan heet de transformatieverzameling een transformatie*groep*. En we zijn dan gekomen tot een algemeen beginsel, dat het eerst duidelijk is

uitgesproken door Klein in 1872, in een publicatie welke veelal geciteerd wordt als het „*Erlanger Programm*": elke transformatiegroep geeft aanleiding tot een meetkunde, die in wezen niets anders is dan de invariantentheorie der groep.

De hier geschetste mogelijkheid om via het groepen- en invariantenbegrip tot nieuwe meetkunden te komen, beschouwe men niet als een beeld van de historische ontwikkeling. Men moet zich ook niet voorstellen dat de analytische behandeling dezer meetkunden dateert van het moment, dat het Erlanger Programm het licht zag. Integendeel, de meest bekende transformatiegroepen geven aanleiding tot meetkunden, die voordien reeds lang bekend en bestudeerd waren, en Klein was dan ook in staat om de juistheid van zijn beginsel aan verschillende voorbeelden te demonstreeren. De groote beteekenis van zijn principe moet gezien worden in de mogelijkheid die het biedt om de verschillende op analytische wijze behandelde systemen te classificeeren en hun onderlinge verhoudingen vast te stellen. Als zoodanig heeft het buitengewoon verhelderend gewerkt.

Wanneer wij een enkele transformatiegroep nader willen beschouwen, dan komt daarvoor als een der allerbelangrijkste in aanmerking, die waarbij de nieuwe coördinaten van een punt gevonden worden door de oorspronkelijke te substitueeren in gebroken lineaire uitdrukkingen, die alle dezelfde noemer hebben.

De met deze groep verbonden geometrie is geen andere dan die welke wij boven hebben aangeduid met de naam projectieve meetkunde. Zij krijgt haar groote ontwikkeling in de eerste helft der 19de eeuw, en kan in verschillende opzichten beschouwd worden als een der belangrijkste meetkunden, die de geometer bestudeert. Zoo belangrijk, dat een van haar beoefenaren, de engelsche mathematicus Cayley, om redenen, die wij nog nader zullen preciseeren, in zijn tijd zonder tegenspraak kon verklaren: *projective geometry is all geometry*. Als een ander argument noem ik U het feit, dat wanneer de wiskundige spreekt van invariantentheorie zonder meer, hij steeds bedoelt, de invariantentheorie der projectieve groep.

De projectieve groep omvat een ruimere verzameling van transformaties dan de Euclidische. Zij brengt in de figuren, die aan haar worden onderworpen, verder strekkende veranderingen aan. Om een indruk te geven van de aard dezer veranderingen, keeren wij tot de meer aanschouwelijke meetkunde terug en beperken ons daarbij eenvoudshalve tot vlakke figuren. Zooals in de Euclidische meetkunde wordt toegestaan de figuren aan

een verplaatsing te onderwerpen en ons slechts die eigenschappen interesseeren, welke een dergelijke verplaatsing kunnen verdragen, is het in de projectieve meetkunde bovendien geoorloofd de figuur, uit een buiten haar vlak gelegen punt, op een ander vlak te projecteeren. En men schenkt zijn aandacht alleen aan die eigenschappen, welke bij deze meer omvattende transformaties zijn behouden. Het is duidelijk, dat verschillende begrippen en stellingen uit de Euclidische meetkunde thans zinloos zijn. Immers na een dergelijke projectie zal de afstand tusschen twee punten in 't algemeen niet dezelfde zijn gebleven, evenmin de hoek tusschen twee lijnen. Evenwijdige lijnen kunnen door projectie in snijdende lijnen overgaan, en omgekeerd; de merkwaardige punten van een driehoek verliezen alle beteekenis. Men kan zelfs aantoonen, dat een driehoek steeds door een geschikt gekozen projectiviteit in een willekeurige andere kan overgaan, dus dat alle driehoeken projectief-congruent zijn, of anders gezegd, dat een driehoek geen invariant bezit. Om na deze negatieve eigenschappen der projectieve meetkunde te hebben genoemd, niet de indruk te vestigen, dat zij over geen enkele stelling zou beschikken, wijs ik U op het feit, dat een rechte lijn door projectie opnieuw in een rechte lijn overgaat, zoodat dus de collineaire ligging van eenige punten een begrip is, dat zijn beteekenis niet heeft verloren. Een cirkel kan door centrale projectie overgaan in een der figuren, die men in de Euclidische meetkunde aanduidt met ellips, parabool of hyperbool, maar hij verliest niet de eigenschap, met een rechte lijn hoogstens twee punten gemeen te hebben. De projectieve meetkunde kent dan ook deze figuren niet afzonderlijk, maar bestudeert hun gemeenschappelijke eigenschappen, waarbij met geen woord sprake is van middelpunt, brandpunt of asymptoot.

Een andere belangrijke transformatiegroep is de affiene; haar elementen onderwerpen de puntcoördinaten aan geheele lineaire substituties. Meetkundig komt dat hierop neer, dat behalve Euclidische bewegingen ook parallelprojecties zijn toegestaan. De veranderingen, welke hierdoor in de figuren worden teweeggebracht zijn minder verstrekkend, dan die, welke door de projectieve groep worden geïnduceerd. Wij komen dichter bij huis, er zijn thans minder Euclidische begrippen zinledig. De affiene meetkunde kent het begrip evenwijdig, in den zin van niet-snijdend, zij bevat de stellingen omtrent evenredigheid van lijnstukken, van de merkwaardige punten van de driehoek kent zij althans het zwaartepunt, zij kent ook de onderscheiding

tusschen ellips, parabool en hyperbool. Zij beschikt nog niet over de fundamenteele metrische begrippen „afstand" en „hoekmaat".

Naast de projectieve en de affiene groep noem ik U nog die, welke naast de Euclidische bewegingen de gelijkvormigheidstransformaties en de inversies bevat, en die ten grondslag ligt aan de *conforme* meetkunde. Het is hier tevens de plaats om er op te wijzen, dat de *topologie* is die meetkunde, welke gecoördineerd is aan de zeer ruime groep der continue transformaties.

De boven gegeven definitie van een meetkunde als de invariantentheorie van een willekeurige transformatiegroep, zou op 't eerste gezicht doen verwachten, dat de geometer zich bezighoudt met zeer abstracte, alle werkelijkheid vreemde systemen, die met de gewone meetkunde slechts de naam gemeen hebben. Uit de gegeven voorbeelden moge zijn gebleken, dat eenige eenvoudige en veel bestudeerde transformatiegroepen de analytische achtergrond vormen van overbekende, synthetisch te behandelen meetkunden en dat de verschillende elementen dezer groepen als aanschouwelijke meetkundige bewerkingen kunnen worden geïnterpreteerd.

Wij merkten reeds op, dat de groote beteekenis der groepentheoretische opvatting van de geometrie ons niet in de eerste plaats scheen te berusten op de mogelijkheid, die zij biedt om nieuwe meetkunden aan de vroeger bestudeerde toe te voegen, dan wel in de hulp, die zij ons verschaft bij het vaststellen van de onderlinge verhouding der behandelde systemen. Het zijn twee belangrijke begrippen uit de groepentheorie, die hierbij op de voorgrond treden, n.l. het begrip *ondergroep* en het begrip *isomorphie*.

Men noemt de groep G′ een ondergroep van de groep G, als al haar elementen tot G behooren. Alle invarianten van G zijn a fortiori invarianten van G′, alle begrippen en stellingen der G-meetkunde, komen ook in de G′-meetkunde voor, maar het omgekeerde behoeft blijkbaar niet het geval te zijn. Wij beschouwden in het begin twee soorten meetkunde, die van de Euclidische onderscheiden zijn. De eene soort kunnen wij thans kort definieeren als te bestaan uit meetkunden, wier transformatiegroep de Euclidische bewegingsgroep als ondergroep bevat. Om de Euclidische meetkunde heen liggen in concentrische, steeds grootere kringen de aequiforme, de aequiaffiene, de affiene en de projectieve meetkunde. De projectieve groep heeft ook de niet-Euclidische bewegingsgroep als ondergroep, de Euclidische is weer een ondergroep van de conforme groep. Men zou

de onderlinge ligging der verschillende meetkunden door een soort landkaart kunnen illustreeren.

Heeft men bij het begrip *ondergroep* te denken aan de verhouding van een ruimere, minder gedifferentieerde meetkunde tot een meer gespecialiseerde, door het woord *isomorphie* wordt een relatie van gelijkwaardigheid aangeduid. Men noemt twee groepen G_1 en G_2 isomorph, wanneer tusschen de elementen van G_1 en G_2 een zoodanige één-één toevoeging kan worden gevonden, dat aan het product van twee elementen a_1 en b_1 uit G_1, het product der toegevoegde elementen a_2 en b_2 uit G_2 is toegevoegd. Abstract beschouwd zijn de groepen G_1 en G_2 identiek, de tot G_1 en tot G_2 behoorende meetkunden zijn essentieel dezelfde, maar ze kunnen verschillen in nomenclatuur, doordat bij de twee groepen aan een verschillende belichaming is gedacht. De eene meetkunde kan worden beschouwd als een spiegelbeeld van de andere; beeld en voorwerp verschillen in uiterlijkheden, maar hebben dezelfde innerlijke structuur. Dergelijke vergelijkbare meetkunden zijn voor de geometer van buitengewoon belang. Zij stellen hem in staat bij de behandeling der G_1-meetkunde, hetzij systematisch, hetzij naar de eisch van het moment, zich in te laten met de vraag, hoe het analoge probleem zich in de G_2-meetkunde aan de voorstelling voordoet en hij kan uitmaken, welke der twee realisaties hem de beste weg naar de oplossing van zijn probleem doet vermoeden. Tusschen de twee meetkunden bestaat een verband als tusschen twee volmaakt aequivalente talen, hij kan kiezen in welke zijn volzinnen het duidelijkst klinken.

De projectieve meetkunde in de ruimte van drie afmetingen is isomorph met de niet-Euclidische in R_5; de conforme in het platte vlak met de niet-Euclidische in R_3; de groep der projectiviteiten in R_3, welke een rechte invariant laten, is isomorph met de aequiforme groep in R_4, zie daar eenige voorbeelden om het begrip isomorphie te illustreeren. Het kan zijn, dat in een met een G_1-meetkunde aequivalente G_2-meetkunde de problemen zooveel eenvoudiger worden, dat ze voor sommigen iets van hun bekoring verliezen. Die behandelingsmethode der niet-Euclidische meetkunde, welke gebruikt haar isomorphie, om niet te zeggen identiteit, met de metriek van Cayley is voorzeker de gemakkelijkste, maar zij mist de aantrekkelijkheid van een historische behandeling. Verscheiden problemen der niet-Euclidische meetkunde worden met behulp der absolute kwadratische varieteit zoo gemakkelijk opgelost, dat Coolidge de rol, die

deze figuur speelt, terecht met die van een *Deus ex machina* vergelijkt.

Keeren wij na deze bespreking van twee belangrijke begrippen der groepentheorie nog even terug op de groote beteekenis der projectieve meetkunde, dan kunnen wij deze thans begrijpen door de omstandigheid, dat de transformatiegroepen der meest bekende meetkunden zijn, hetzij identiek, hetzij isomorph met een projectieve groep of een van haar ondergroepen.

Dat het principe van Klein niet alleen historische beteekenis heeft, maar tot in onze tijd stimuleerend werkt, moge blijken uit het feit, dat gedurende de laatste decennia de *differentiaalmeetkunde* zich meer en meer heeft losgemaakt van het Euclidische standpunt. Naast de klassieke differentiaalmeetkunde, hebben zich ook in de andere geometrieën, die ik U genoemd heb, systemen ontwikkeld, welke zich bezighouden met begrippen als „booglengte" en „kromtestraal". Min of meer volledig zijn b.v. de projectieve, de aequiaffiene en de conforme differentiaalmeetkunde tot stand gekomen.

In de elementaire meetkunde wordt een betrekkelijke strenge onderscheiding doorgevoerd tusschen planimetrie en stereometrie. Hoewel natuurlijk in 't algemeen de complicaties der meetkundige stellingen en de veelvuldigheid der figuren toenemen met het aantal afmetingen, is een indeeling der meetkunden naar hun dimensietal tegenwoordig zonder essentieele beteekenis en de tijd is voorbij, dat de meerdimensionale meetkunde een afzonderlijk hoofdstuk der geometrie vormde. Interessant blijft echter bij sommige projectieve onderzoekingen het verschillend gedrag van overigens analoge figuren in ruimten van even, en in die van oneven aantal afmetingen.

Op een andere onderscheiding in de meetkunde wenschen wij met een enkel woord in te gaan. Bij het principe van Klein is gesproken over groepen, gedefinieerd door transformatievergelijkingen tusschen coördinaten. Daarbij hebben we in het midden gelaten, welke soorten van getallen men als coördinaten wenscht toe te laten. In de meetkunde der projectieve groep krijgt men de eenvoudigste en meest algemeen redigeerbare stellingen, als men zijn coördinaten ontleent aan de verzameling der complexe getallen. Beperking tot het lichaam der reëele getallen voert tot tal van interessante vragen omtrent de bestaanbaarheid van bepaalde figuren.

Onder de meetkunden, die voor hun coördinaten over een nog weer ander getallenlichaam beschikken, noem ik U die, waarbij

dit lichaam eindig is. Deze eigenaardige meetkunden bezitten blijkbaar ook slechts een eindig aantal punten en zij munten dus geenszins uit door groote vormenrijkdom. Toch gelden in de projectieve dezer eindige meetkunden alle daarvoor in aanmerking komende axioma's der projectieve meetkunde. Ook bestaan er isomorphieën tusschen eindige meetkunden en eenige bekende buigpuntsconfiguraties. — Het is de geometer ook mogelijk zijn coördinaten te ontleenen aan een verzameling getallen, wier onderlinge bewerkingen niet voldoen aan de gebruikelijke regels. Zoo ligt aan de z.g. *niet-Pascalsche* meetkunde een getallensysteem ten grondslag, dat de commutativiteit der vermenigvuldiging mist.

In het vorige is getracht, U een indruk te geven van een wijze, waarop de wiskundige er toe is gekomen, zich in andere meetkunden te verdiepen, dan de aloude Euclidische. Het is daarbij wel gebleken, dat deze tusschen de vele en velerlei meetkundige stelsels volstrekt geen bijzondere plaats inneemt. Ook nog afgezien van het feit, dat zij haar unieke beteekenis voor de beschrijving van het physische wereldbeeld niet heeft kunnen handhaven, zal men moeten toegeven, dat in het geheel der meetkundige wetenschap haar belangrijkheid betrekkelijk is. Doordat haar transformatiegroep ondergroep is van eenige andere, belangrijke groepen, behooren tot haar verschillende stellingen, die een ruimere beteekenis hebben. De daaruit voortvloeiende rijkdom aan begrippen en stellingen wordt verkregen ten koste van de innerlijke eenheid. Het zou geen pas geven om van een zoo eerbiedwaardige wetenschap als de Euclidische meetkunde eenig kwaad te spreken, maar het is een feit, dat zij tot op zekere hoogte een eigen cachet mist. Het meerendeel der stellingen omtrent evenredigheid van lijnstukken, inhouden en zwaartepunten behoort tot de affiene meetkunde, evenals b.v. de stellingen van Menelaus en de Ceva; een stelling als die van Ptolemeus vindt haar fundament in de conforme meetkunde, weer andere hebben een algemeen projectieve beteekenis. Autochthone stellingen der Euclidische meetkunde zijn daarentegen b.v. die over de hoeksom van een driehoek en het theorema van Pythagoras.

Wanneer men van meerdere stellingen uit de Euclidische meetkunde b.v. het affiene karakter heeft erkend, dan wil dit nog niet zeggen, dat men ze zonder meer in een leerboek der affiene meetkunde zou kunnen overnemen. De affiene stellingen

worden n.l. dikwijls niet met affiene axioma's bewezen. Wanneer men consequent zou willen doorvoeren het principe om bij het bewijs van een bepaalde stelling geen hulpmiddelen te gebruiken, die aan het wezen der zaak vreemd zijn, zich niet wil beroepen op overbodige voorwaarden, dan zou het gebruikelijke bewijs voor de stelling: „in een parallelogram deelen de diagonalen elkaar middendoor" moeten verwerpen. Deze stelling is een affiene, zij moet dus zonder eenig theorema omtrent congruentie kunnen worden bewezen.

Het zou ondankbaar zijn om hier niet te spreken van de bekoring, die kan liggen in de behandeling van problemen der Euclidische meetkunde, die zich eigenlijk niet recht in het principe van Klein laten onderbrengen. De inhoud van een lichaam is een affien begrip; stelt men de vraag in hoeverre twee lichamen met dezelfde inhoud te verdeelen zijn in paarsgewijze congruente stukken, dan heeft dat probleem een eenigszins tweeslachtig karakter. Stelde men het terzijde, dan zouden wij de interessante onderzoekingen missen, die b.v. Dehn naar deze vragen heeft ingesteld.

Ik heb gemeend voor deze openbare les een algemeen geometrisch beginsel tot onderwerp te moeten kiezen. Het principe van Klein gaf mij aanleiding, U eenige meetkundige systemen te noemen, die van het Euclidische afwijken, hun eigen bekoring hebben, en kunnen dienen om de meetkunde, waarmee wij allen zijn opgegroeid, beter te begrijpen. Ik stel op hooge prijs, dat het mij door de welwillendheid van de Curatoren en van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde is vergund aan deze Universiteit lessen te geven, waarbij „bijzondere hoofdstukken" der meetkunde nader kunnen worden besproken.

QUALITÄT UND QUANTITÄT IN DER MATHEMATIK.[1]

VON

HANS FREUDENTHAL in Amsterdam.

Auf der Suche nach den Uranfängen der Mathematik müssen wir uns zu den Uranfängen des menschlichen Denkens überhaupt zurückbegeben. Der erste Eingriff in das Chaos der Erscheinungen seiner Umwelt, den der Mensch vollzieht, ist der Akt des Unterscheidens, des Trennens, des Zerspaltens. Er trennt *sich* von der *Umwelt,* den *Himmel* von der *Erde,* den *Menschen* vom *Tier,* und im Akte der Erinnerung zerlegt er seine eigene Persönlichkeit in einen vorstellenden und einen vorgestellten Teil. Er setzt das Eine und dawider das Andere, das ταὐτόν und dawider das ϑάτερον Dieser „Akt der Auseinanderfallung eines Lebensmoments", wie ihn *L. E. J. Brouwer* nennt, dieser Akt der Entzweiung ist das konkrete Abbild der Schöpfung der Zwei. In ihm hat der Mensch die Zwei und damit die natürlichen Zahlen überhaupt gefunden. Indem die Zwei als eine neue Einheit erfasst und ihr eine neue Zwei gegenübergestellt wird, entsteht die Drei; indem diese Drei als eine neue Einheit erfasst und ihr eine neue Zwei gegenübergestellt wird, entsteht die Vier usw. Kein wesentlich neuer Prozess ist es also, der nach Erschaffung der Zwei irgendeine natürliche Zahl liefert, und auch die Idee von der unbegrenzten Fortsetzbarkeit dieses Prozesses, die uns zur unbegrenzten Reihe der natürlichen Zahlen führt, ist keine wesentlich neue Idee.

Die Zwei, die der Mensch im Akte des Unterscheidens schafft, ist durchaus qualitativer Herkunft und Natur; ihr Wesensgehalt ist es, dass eine gewisse Qualität dem einen Ding zu- und dem andern aberkannt wird. In ihr liegt nichts von jenem Quantitativen, das

---

[1]) Antrittsvorlesung anlässlich der Habilitation als Privatdozent an der Universität Amsterdam, 28. Mai 1931.

wir empfinden, wenn wir einem Gegenstand die Länge von zwei Metern oder zwei Fuss zuschreiben. Dass ein Gegenstand zwei Fuss lang ist, besagt zwar ursprünglich, dass man zwei Füsse hintereinanderstellen muss, um von seinem einen Ende zum andern zu gelangen. Aber diese aus dem qualitativen Charakter der Zwei fliessende Bedeutung geht unter in einer Entwicklung, für deren Ziel der Sprachgebrauch symbolisch ist, der nicht „zwei Füsse", sondern „zwei Fuss lange" Gegenstände kennt.

Was ist nun dieses Quantitative, das wir heute im Akte des Messens z.B. empfinden? Sein wesentlicher Bestandteil ist sicher *nicht* die Zahlenangabe, denn diese kommt letzten Endes vom Zählen, vom qualitativen Unterscheiden her; sein wesentlicher Bestandteil ist vielmehr etwas, was ich bei einer solchen Massangabe weglasse und damit implizit voraussetze, nämlich das Wörtchen „ungefähr". Dies Gefühl der Unsicherheit, das dem Quantitativen eigen ist, zeigt uns, dass die Quantität nicht wie die Qualität ein Akt des Bewusstseins, sondern eine psychische Grundstimmung ist, die sich nur durch ein kompliziertes Modell vom Qualitativen her begreifen lässt. Und nur insofern als das qualitative Unterscheiden die Zwei in sich birgt, dringt durch dieses Modell die Zahl, die ihrem Wesen nach nichts mit der Quantität gemein hat, in die mathematische Vorstellung von der Quantität ein.

Solange wir uns nur mit der ruhenden Welt beschäftigen, reicht die Qualität aus zur Bewältigung der Erscheinungen. Dieser Stuhl und jener Stuhl, dieser Mensch und jener Mensch — das sind wohlbestimmte und wohlunterschiedene Qualitäten, die durch mehr oder weniger scharfe Kanten empirisch und durch das Aufsiehinzeigenkönnen theoretisch von ihrer Umwelt getrennt sind. Nichts verbindet diesen Stuhl mit jenem, möge er dicht neben ihm oder weit von ihm entfernt stehen, und selbst der einzelne Stuhl ist keine quantitative Einheit, ich kann ihn zersägen und damit die vermeintliche Quantität in Qualitäten auflösen. Was ich aber nicht zersägen kann, ist die zeitliche Einheit des Stuhles, die Faser, die den Stuhl von heute mit dem von gestern und dem von morgen verknüpft. „Dicht beieinander wohnen die Gedanken, doch hart im Raume stossen sich die Sachen." Die Gedanken sind das typische Beispiel für etwas, was in der Zeit ist. Die Dinge im Raume haben Kanten und sind mittels dieser Kanten zu isolieren, die Dinge in der Zeit sind eng mit ihrer Nachbarschaft verflochten, so eng, dass

ich es fertig bringe, meinen Körper von vor zwanzig Jahren mit meinem Körper von heute zu identifizieren, obwohl sie vielleicht kein einziges Atom mehr miteinander gemein haben. Im Raum ist jedes Ding ein Individuum, in der Zeit aber erst eine gewisse Mannigfaltigkeit von Dingen; denn jedes Ding hat seine Vergangenheit und seine Zukunft, mit denen es verbunden ist, durch eine Mannigfaltigkeit von Dingen, die ich nicht qualitativ zerlegen, sondern nur quantitativ erleben kann.

Es wäre einseitig, diesen Zusammenhang der Dinge in der Zeit Kausalität nennen zu wollen. Erinnerung, Zielsetzung und Begriffsbildung sind ebensowohl Formen des zeitlichen Zusammenhangs. Die Form nun, in der der zeitliche, quantitative Zusammenhang die qualitative Raumstruktur zersetzt, ist die Bewegung. Aus der rein räumlichen Auffassung einer Strecke kann ich nie dieses Quantitative, dieses Kontinuierliche herleiten; erst dadurch, dass ich einen Gegenstand längs ihrer bewegt sehe, entsteht die Quantitätsempfindung. Unterwirft sich der Raum nicht diesem Diktat der Zeit, so holt Achill die Schildkröte nicht ein, der Gedanke holt nicht die fliehende Vergangenheit ein und überrundet nicht die entgegenkommende Zukunft. Das ist der Sinn jener bekannten Paradoxie des *Zenon,* die im Kampfe um die quantitative Raumauffassung eine so grosse Rolle spielte.

Sie werden mich nun fragen: was hat jener Streit, in den Zenon mit seinen Paradoxien eingreift, zu tun mit qualitativer und quantitativer *Mathematik*? Geht es bei diesem Kampf, der lange Zeit den Kern der griechischen Philosophie bildete, nicht für oder wider *physikalischen* Atomismus? Aber schon die Fragestellung, ob die Punkte eine Ausdehnung besitzen oder nicht, zeigt uns, in wie engem Zusammenhang qualitative Mathematik und physikalischer Atomismus verfochten wurden, ja dass man sie vielleicht als dieselbe Sache ansah. Man hat den Griechen vorwerfen wollen, dass sie das Schicksal einer mathematischen Theorie von den Gegebenheiten der physikalischen Welt abhängig machten; andere haben ihnen vorgeworfen, dass sie vom grünen Tisch her der Natur Gesetze geben wollten. Beide Vorwürfe sind vielleicht gleich einseitig, denn für die Auffassung jener Zeit waren Mathematik und Physik so eng verknüpft, dass man qualitative Mathematik nicht ohne atomistische Physik denken konnte und umgekehrt. Aber nehmen wir selbst die griechische Auffassung in jenem krassen Sinn, dass wir in den

*Euklid*ischen Elementen einen Versuch sehen, die Arithmetik zurückzuführen auf die Geometrie und damit auf die Physik, im Gegensatz zu dem modernen Versuch, der in umgekehrter Richtung verläuft. Selbst aus dieser krassen Deutung dürfen wir keinen Vorwurf herleiten. Zwar sind wir heute darüber hinaus, die Geometrie unmittelbar als Physik anzusehen, aber denken wir nur daran, dass *Bertrand Russel* seine Grundlegung der Mathematik von der Existenz unendlich vieler Dinge in der physikalischen Welt abhängig macht und *Hilbert* sich für seine formalistische Mathematik auf die papierene, also physikalische Existenz eines gewissen Formelsystems beruft.

Dann wird uns eine Verquickung von Mathematik und Physik nicht so wunderlich erscheinen. Um so erstaunlicher ist es aber dann auch, dass eine Entdeckung so überraschender Art wie die der Harmonielehre die griechische Mathematik nicht in qualitative Bahnen gelenkt hat. Eine so mystische Tatsache wie die, dass die halbe Saite die Oktave, die Zweidrittelsaite die Quinte usw. des Grundtones gibt, kann einem sehr wohl an eine Vorliebe der Natur für die ganzen Zahlen, für die Qualitäten Glauben machen. Heutzutage ist man zwar in dieser Hinsicht misstrauischer geworden. Wenn einem in der Physik heute eine solche diskontinuierliche Verteilung begegnet, so versucht man doch, sie in ein analytisch-quantitatives Schema einzuordnen. Man versucht, sie als Menge der Eigenwerte einer Differentialgleichung anzusehen, d.h. als isolierte Werte eines Parameters, für die eine gewisse Differentialgleichung allein Lösungen besitzt. So ist in neuester Zeit die seltsame Vorliebe der Natur für Zahlentheorie, die das Bohrsche Atommodell mit seinen durch mystische Gesetze ausgezeichneten Bahnen zu offenbaren schien, durch die *Schrödinger*sche Differentialgleichung dementiert worden.

Obzwar es nun zweieinhalb Jahrtausende dauerte, bis die Harmonielehre quantitativ erfasst wurde, ist die griechische Mathematik doch ihren Weg zur Quantität gegangen, d.h. den Weg zur Versöhnung von Qualität und Quantität, zur Erfassung der Quantität von der Qualität her. Der Weg, den ich Sie führen werde, geht von der Harmonielehre aus; ob es der geschichtliche Weg ist, will ich nicht enscheiden.

Die Quinte eines Tones erhalte ich bekanntlich, indem ich 2/3 der Ausgangssaite nehme, nehme ich von der Quinte wieder die Quinte,

so erhalte ich 4/9 und, indem ich eine Oktave zurückgehe, 8/9 der ursprünglichen Saite; nehme ich noch einmal die Quinte, so komme ich zu 16/27, dann zu 32/81 und, indem ich wieder eine Oktave zurückgehe, zu 64/81. Nach 12 Quintenschritten und 7 Oktavenrückschritten bin ich schliesslich bei einem Ton angelangt, dessen Saitenlänge mit 524288/531441 oder rund 73/74 nur noch sehr wenig von der ursprünglichen Saitenlänge abweicht, musikalisch gesprochen handelt es sich um einen Fehler von etwa 1/10-Intervall. Das wohltemperierte Klavier beruht ja darauf, dass man dies „Pythagoreische Komma" vernachlässigt, d.h. so tut, als wäre die Differenz nicht vorhanden, und sie auf die Quintensprünge verteilt. Wer nun mit diesem Klavier nicht zufrieden ist, kann sich eines bauen, das durch zwei oder drei Quintenzirkel läuft, oder er kann sogar so weit gehen, dass sich die Quintensprünge wieder beinahe schliessen und unter Vernachlässigung eines wesentlich kleineren Kommas ein wohltemperiertes Klavier höherer Ordnung konstruieren; dazu müsste er allerdings 41 Quintenschritte und 24 Oktavenrückschritte machen (41/65 ist nämlich der nächste Kettennäherungsbruch von log2/log3). Innerhalb einer Oktave liegen dann statt 12 Tönen 41, deren jeder von dem nächsten nur noch sehr wenig abweicht, aber doch qualitativ wohlbestimmt ist durch die Zahl der Quintensprünge, die zu ihm führen. Man kann nun auch mit diesem Klavier sich nicht zufrieden geben und das Verfahren immer weiter fortsetzen; auch der nächste Schritt dürfte noch keine praktische Unmöglichkeit in sich schliessen. Aber sicher ist, dass schon aus praktischen Gründen das Verfahren einmal abbricht, zum mindesten wegen der endlichen Lebensdauer des Konstrukteurs, wenn nicht schon deswegen, weil sein Gehör nicht mehr ausreicht, um bei Fortsetzung des Verfahrens wirklich einen Fortschritt in Hinsicht einer Bereicherung des Tonvorrates festzustellen.

Hier setzt nun auf den meisten Gebieten der Physik ein Idealisierungsprozess ein, den ich in Fortsetzung meiner Analogie so zu formulieren habe: Erstens fingiere ich, dass ich beliebig grosse Klaviere mit beliebig vielen Quintensprüngen bauen und mir zu jedem besseren Klavier ein besseres Gehör besorgen kann. Zweitens — und nun kommt das Wesentliche — dass ich dabei die Mannigfaltigkeit von Tönen, wie sie mir die Violine bietet, niemals ausschöpfen werde, obwohl ich sie beliebig gut approximiere. Diese zwei Fiktionen sind das Fundament, auf dem der grösste Teil un-

seres physikalischen Gebäudes ruht. Die erste führt mich zwar zu einer potentiellen Unendlichkeit von Tönen, wenn ich eines der konstruierten Klaviere nach dem andern durchlaufe; sie führt aber nicht über das Qualitative hinaus, denn mit je zwei Tönen, die ich vergleichen *soll*, weist sie mir auch *das* Klavier, also *die* Güte des Gehörs an, mit dessen Hilfe ich sie vergleichen *kann*. Die zweite hingegen, die mir rät, die doch stets unvollkommene Folge von immer besseren Klavieren durch die Violine zu ersetzen, führt mich ganz ins Quantitative hinein. Es ist vorbei mit dem Unterscheidenkönnen, denn mit je zwei Tönen der Geige ist mir noch nicht die Nummer des Klaviers, die Güte des Gehörs angewiesen, die ich zu ihrem Vergleich benötige. Dabei ist nun allerdings die Geige nicht mehr in diesem qualitativen Sinn definiert, den uns die räumlichen Dinge nahelegen, sondern in jenem quantitativen Sinn, der aus dem zeitlichen Zusammenhang herkommt. Genauer: Denkt man sich die Tonintervalle zu einem Stammbaum vereinigt, derart, dass alle Intervalle des folgenden Klaviers, die in einem gewissen Intervall des vorhergehenden Klaviers enthalten sind, im Stammbaum dessen Nachfolger bezeichnen, so ordnen wir nicht mehr wie beim qualitativen Unterscheiden einer endlichen Folge von Intervallen eine Realität zu, sondern erst einer unendlichen Folge. Die Frage, ob die Punkte, d.h. diese unendlichen Intervallfolgen, eine Ausdehnung besitzen, haben wir damit verneint.

Mit diesem unendlichen Stammbaum, dem Wesentlichen an der *Brouwer*schen Menge, hat man nun die Quantität, den zeitlichen Zusammenhang, als eine sich ins Unendliche entwickelnde Qualität erfasst, ohne dabei auf das Numerische, auf das eigentliche Zahlenkontinuum einzugehen; hier bestätigt sich meine frühere Behauptung, dass das Wesen der Quantität nicht die Zahl ist. Ich werde aber doch in Zukunft meist das Kontinuum als Muster quantitativer mathematischer Forschung zitieren, ebenso wie die endliche Gesamtheit als Muster qualitativer Forschung. Das will dann keineswegs besagen, dass es nicht auch endliche quantitative und unendliche qualitative Gesamtheiten gäbe. Ferner werde ich, um mich an eine mehr mathematische Sprechweise anzulehen, im Folgenden häufig statt quantitativ analytisch und statt qualitativ kombinatorisch sagen, damit natürlich den üblichen mathematischen Sprachgebrauch verallgemeinernd. Das Wort *analytisch* leihe ich her von dem von *L. E. J. Brouwer* eingeführten Begriff der analytischen

Menge, den ich bereits früher durch jenen Stammbaum skizzierte. Das Wort *kombinatorisch* soll erinnern an kombinatorische Topologie, jenen Zweig der Topologie, in dem die geometrischen Gebilde nicht als Punktmengen angesehen werden, sondern als aufgebaut aus gewissen Elementargebilden, die in rein kombinatorischer Weise aneinandergereiht sind, so ungefähr, wie wenn man einen Teppich beschreibt durch Angabe des Knüpfschemas, nach dem er erzeugt ist, ohne sich darum zu kümmern, dass die einzelnen Fäden selber wieder recht komplizierte Dinge sind.

Meine Aufgabe soll es nun, nachdem ich die Begriffe geklärt habe, sein, Ihnen die Geschichte der Mathematik vorzuführen als einen ständigen Kampf zwischen kombinatorisch-qualitativer und analytisch-quantitativer Auffassung. Dazu muss ich aber noch bemerken, dass sehr oft Probleme, Sätze und Beweise, die für sich analytisch aussehen, vom historischen Standpunkt aus als kombinatorisch erscheinen, dann nämlich, wenn sie nichts sind als kombinatorische Verknüpfungen älterer analytischer Ideen ohne neue analytische Zutaten. Um diesem Zwiespalt zu entgehen, muss ich mich bei einer geschichtlichen Erörterung qualitativer und quantitativer Mathematik auf die wirklich neuen Ideen beschränken. Ich kann gleich zur Neuzeit übergehen, denn trotz der heftigen Kämpfe um das Kontinuum, in denen z.B. die Zenonischen Paradoxien ein wichtiges Argument gegen den Atomismus waren, trotz des exakten Aufbaus einer Theorie der reellen Zahlen in den Euklidischen Elementen, trotz Archimedes ist die griechische Mathematik zwar dem Gegenstand nach analytisch, der Methode nach jedoch im wesentlichen kombinatorisch gewesen; die Araber vollends als Algebraiker waren auch dem Gegenstand nach Kombinatoriker.

Erst in der Neuzeit entsteht gleichzeitig mit einer Astronomie, die den Lauf der Gestirne seines qualitativ-kombinatorischen Gewandes entkleidet, eine Mathematik, die in der Differential- und Integralrechnung die Summe aus der Auffassung der Zahlengesamtheit als des Kontinuums zieht. Wenn ich von der mittleren Geschwindigkeit eines bewegten Körpers in immer kleineren Intervallen übergehe zu seiner Momentangeschwindigkeit, so vollziehe ich denselben Uebergang vom Qualitativen zum Quantativen, den ich vorhin beim Kontinuum schilderte.

Eine Erfindung wie die Infinitesimalrechnung musste einen star-

ken Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik ausüben. Und so dringt denn in den nächsten Jahrhunderten die analytische Methode in alle mathematischen Gebiete ein; nur die Geometrie bleibt vor der Hand von ihr verschont. Dafür wird ein zunächst rein kombinatorisches Gebiet von der Analysis erobert, es entsteht die analytische Zahlentheorie. Der *Euler*sche Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen zeigt uns deutlich die wachsendeMacht der analytischen Methode. Hatte *Euklid* die Existenz unendlich vieler Primzahlen rein kombinatorisch bewiesen, indem er zu jeder Primzahl eine weitere konstruierte so stützt sich *Euler* auf die Divergenz der Reihe der reziproken Primzahlen, eine durchaus analytische Tatsache. Durch *Gauss* wird der Algebra ein wichtiges Problem entrissen und der analytischen Methode unterworfen; sah *Euler* noch in der Auflösung der algebraischen Gleichungen ein rein algebraisches, kombinatorisches Problem ähnlich dem der Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichung, so rückt *Gauss* durch den Satz, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel besitzt, das Problem und seine Lösung ins Analytische, denn er benutzt ausser den kombinatorischen Eigenschaften der Polynome wesentlich ihre Stetigkeit, wiederum eine analytische Tatsache.

Aber nun um die Wende des 18. Jahrhunderts holt die kombinatorische Richtung zu einem mächtigen Vorstoss aus. Etwa gleichzeitig mit der Erneuerung der Atomtheorie in der Chemie erleben wir die Grundlegung einer neuen Algebra durch *Galois* und *Ruffini.* Das eben für die Analysis beschlagnahmte Problem der Auflösung der algebraischen Gleichungen wird von der Kombinatorik zurückerobert. Der *Gauss*sche Fundamentalsatz der Algebra wird in der neuen Theorie wesenlos. Es geht nicht mehr um die Wurzeln als Mitglieder des Kontinuums, sondern um rein kombinatorische Zusammenhänge zwischen algebraischen Gleichungen, um Aussagen wie die, dass durch gewisse kombinatorische Prozesse eine Gleichung von höherem als dem vierten Grade im Allgemeinen nicht auf reine Gleichungen zurückgeführt werden kann. Wir spüren dies erneute Vordringen der Kombinatorik auch bei *Gauss* in seinem zweiten Beweis des Fundamentalsatzes, in dem die analytische Methode auf das äusserst notwendige Minimum beschränkt ist.

Nach diesem erfolgreichen Vorstoss der Kombinatorik herrscht im 19. Jahrhundert ein unaufhörlicher Austausch zwischen quantitativer und qualitativer Methode. Während die Algebra sich teils von

analytischen Elementen reinigt, teils sich an ihnen bereichert, entsteht als Produkt der analytischen Methode durch *Cauchy* die Funktionentheorie und durch *Gauss* und *Monge* die Differentialgeometrie, das erste wahrhaft analytische Gewächs auf geometrischem Boden. Aber das Ende des Jahrhunderts bringt einen neuen Vorstoss der Kombinatorik. Etwa gleichzeitig mit der Erneuerung der Atomtheorie in der Physik entsteht die Idealtheorie als kombinatorische Theorie der algebraischen Zahlen, die in ihrem weiteren Ausbau allerdings stark analytisch durchsetzt wird, in der Funktionentheorie werden durch *Dedekind* und *Weber* die algebraischen Funktionen der Analysis weitgehend entrissen, der allgemeine Mengenbegriff wird durch *Cantor* zu einer kombinatorischen Angelegenheit, *Poincaré* schafft die kombinatorische Topologie, die ich ja bereits als Beispiel der kombinatorischen Methode erwähnte, *Kronecker* endlich tut den Ausspruch, dass die ganzen Zahlen von Gott sind, alles Uebrige aber Menschenwerk ist, er fordert also die Kombinatorisierung der gesamten Mathematik. Doch auch die Analysis hat neue Fortschritte zu verzeichnen, nicht nur auf Gebieten analytischen Ursprungs, nicht nur in der Zahlentheorie, in der seit *Dirichlet* die analytische Methode zu einer Selbstverständlichkeit geworden ist, sondern auch auf Gebieten wie dem der Gruppentheorie, die, bei der Begründung der kombinatorischen Theorie der algebraischen Gleichungen entstanden, ihrem Ursprung und Wesen gemäss lange ein kombinatorisches Gesicht bewahrt hatte und nun durch *Lie* ins Analytische verpflanzt wird; ähnlich geht es bei *Lie* und *Hurwitz* der Invariantentheorie. Umgekehrt biegt die ins Analytische verpflanzte Gruppentheorie die Theorie der Differentialgleichungen wieder ins Kombinatorische um.

Im neuen Jahrhundert zeigt sich der Kampf beider Methoden besonders deutlich in der Topologie. Die kombinatorische Topologie wird bei *Brouwer* und *Alexander* wieder zur Punktmengenlehre, aber nicht ohne dass bei *Alexander* letzten Endes das Analytische auf einen kleinen Fleck beschränkt wird und im Uebrigen die kombinatorische Methode unbeschränkt herrscht. Der *Hausdorff*sche Raum, ursprünglich ebenso kombinatorisch wie die *Cantor*sche allgemeine Menge wird bei *Urysohn* und *Alexandroff* etwas Analytisches analog der *Brouwer*schen analytischen Menge, aber doch wieder letzten Endes unter starker Hervorhebung der kombinatorischen Tatsachen.

Mit der Losung „abstrakte Algebra" wird die Algebra auch formal von analytischen Elementen gereinigt; das Kontinuum der reellen Zahlen fristet in ihr nur noch ein kümmerliches Dasein als einer unter vielen Körpern und fällt schliesslich einer kombinatorischen Definition zum Opfer. Während bei *Cantor* nur die *allgemeine* Mengendefinition kombinatorisch war, ist nun eine *spezielle* Menge durchaus quantitativen Charakters kombinatorisch erklärt worden. *L. E. J. Brouwer* hingegen hatte bereits früher, wie ich schon erwähnte, die *allgemeine* Mengenlehre durch den Begriff der analytischen Menge auf quantitative Grundlagen gestellt, während die Axiomatiker der Mengenlehre ihren kombinatorischen Charakter weiter verstärkten.

Während auf den bisher genannten Gebieten Kombinatorik und Analysis als Hilfsmittel einander gegenübertraten, sind sie als prinzipielle Gegensätze aneinandergeraten im Streit um die Grundlagen der Mathematik. *Hilbert* auf der einen Seite will die Mathematik in seinem Formalismus weitgehend auf ein rein kombinatorisches Schema gründen, der *Brouwer*sche Intuitionismus hingegen bemüht sich um einen Aufbau unter Wahrung des analytischen Charakters.

Ich könnte noch viele Beispiele für den Wettstreit zwischen qualitativer und quantitativer Methode nennen, etwa die *v. Mises*sche Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die zum ersten Male einen analytischen Aufbau dieses Gebietes versucht, die modernen Versuche, in der General Analysis ein kombinatorisches Abbild der Differential- und Intregralrechnung zu schaffen, die *Schur-Weyl*schen Untersuchungen, die die Methoden der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen übernehmen und damit der ins Kombinatorische geratenen Gruppentheorie neue analytische Impulse geben, ferner könnte ich auf die moderne Astronomie verweisen mit ihrer stark kombinatorischen Durchsetzung und auf die moderne Physik mit ihrem ständigen Kampf zwischen qualitativer und quantitativer Auffassung.

Ich möchte aber die Beispiele nicht zu sehr häufen, damit Ihnen um so besser der Gesamteindruck bleibt, wie sich unter unaufhörlichen Kämpfen die analytische Methode durchsetzte, wie ihr grosse Gebiete von der Kombinatorik entrissen wurden, wie diese neuen kombinatorischen Ideen wieder die Analysis befruchteten, und wie unaufhörlich Analysis und Kombinatorik Begriffe, Gegenstände und Methoden austauschten.

OPPERVLAKTE-MATEN

DOOR

U. H. VAN WIJK.

De Grieksche mathematici interpreteeren het product van twee lijnsegmenten gewoonlijk als het oppervlak van een rechthoek. (Apollonius b.v. doet dit in zijn werk over de kegelsneden steeds). Ook evenredigheden worden door omzetting in producten veelal op deze wijze behandeld, ofschoon daarnaast een algebraische methode wel toepassing vindt. Aan de meetkundige interpretatie wordt dus het vierkant als oppervlaktemaat ten grondslag gelegd.

Naber werpt daarentegen de hypothese op, dat Pythagoras door beschouwing van andere oppervlaktematen tot het inzicht van zijn theorema gekomen zou zijn. De stelling behoeft dan niet meer bewezen te worden, doch is evident, wat dan weer met de beteekenis van het woord theorema zou kloppen. („Das Theorem des Pythagoras", § 2).

Deze behandelingswijze van het theorema is zoo eenvoudig en elegant, dat het te betreuren is, dat ze in de leerboeken de andere methoden (de algebraische en die, berustend op het gebruik van vierkanten) nog niet heeft verdrongen of althans als „ebenbürtig" naast deze ter sprake wordt gebracht.

Naber verdeelt den rechthoekigen driehoek ABC (hoek A = 90°) op de gebruikelijke wijze in twee er mee gelijkvormige, DBA en DAC, en neemt nu als oppervlakte-eenheid een driehoek, gelijkvormig met alle drie, waarvan de schuine zijde de eenheid van lengte heeft. Oppervlakte ABC is dan a^2, die van de andere c^2 en b^2.

Ik wil mij in de kwestie, waar het gaat om de meerdere of mindere waarschijnlijkheid, of Pythagoras door beschouwing van driehoekige oppervlaktematen tot zijn theorema gekomen is, geen partij stellen. Ze lijkt mij voor het M.O. ook van ondergeschikt belang. Wij docenten uit de 20e eeuw behooren ons echter n.m.m.

van tijd tot tijd los te maken van het vierkant als oppervlaktemaat, zooals wij ons bij ons onderricht zoo menigmaal los hebben gemaakt van de praktijk van het dagelijksch leven.

Wij moeten, indien noodig, de oppervlakte van een driehoek bij gelegenheid ook eens als ab (eenheid: gelijkbeenige driehoek met tophoek C.) of als p^2 (eenheid: driehoek, gelijkvormig met den te meten driehoek) opgeven. Dan kunnen we de leerlingen al in de tweede klasse een formule voor het oppervlak van een willekeurigen vierhoek voorzetten, nl. het product der diagonalen, en behoeven niet tot de vierde klasse te wachten, waar de vierkante oppervlaktemaat ons dwingt er den factor: ½ maal den sinus van den ingesloten hoek aan toe te voegen.

Naber heeft op deze wijze ook het theorema van Ptolemaeus kunnen bewijzen. Hij neemt daartoe als oppervlakte-eenheid een gelijkbeenigen driehoek, waarvan de tophoek gelijk is aan de hoek φ tusschen de diagonalen. De oppervlakte van ABCD (fig. 1) is dan ef. Trekt men nu DE evenwijdig aan AC, dan is opp. ABCD = opp. ABCE, terwijl AE = c en CE = d is. Voorts is $\angle$ BAE = ½ (bg. BC + bg. CE) = ½ (bg. BC + bg. AD) = φ, zoodat opp. BAE = ac en opp. BCE = bd.

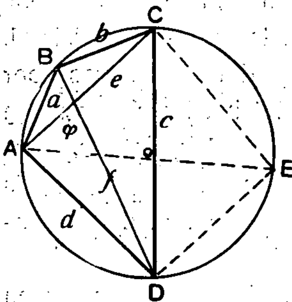


Fig. 1.

Hieronder mogen nog een tweetal voorbeelden volgen. Het eerste werd door mij reeds ongeveer 14 jaar geleden in het Wiskundig Tijdschrift gepubliceerd, doch is, naar mij bleek, nog aan menig docent onbekend. Het is het bewijs van de bekende deellijn-stelling: $d_c^2 = ab - a_1b_1$ (zie fig. 2). Nemen we als oppervlakte-eenheid een gelijkbeenigen driehoek met tophoek ½C, dan is d_c^2 de oppervlakte van $\triangle$ CDE, waarin CE = CD. Zoo is de oppervlakte van $\triangle$ CBF gelijk aan ab, als CF = CA. We hebben $\triangle$ CAD door draaiing over een hoek ½C in den stand CFE gebracht. Hoek G is dus ½C en de oppervlakte

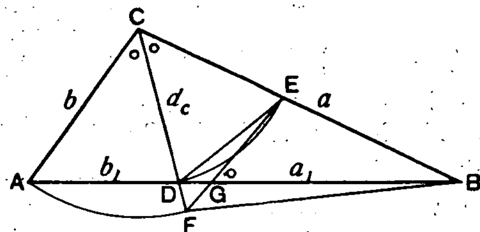


Fig. 2.

van den vierhoek DEBF wordt BD $\times$ EF $= a_1\ b_1$ (q. e. d.).

Is CD grooter dan AC, dan doet zich een kleine moeilijkheid vóór. Het verschil van de driehoeken CBF en CDE is dan nl. een concave vierhoek. Ook deze heeft echter de oppervlakte $a_1\ b_1$. (Zie daaromtrent het artikel over concave figuren op blz. 179 e.v. van den 7en jaargang van dit tijdschrift).

In de tweede plaats geven we een bewijs voor de bekende betrekking tusschen de zijden van drie in denzelfden cirkel ingeschreven veelhoeken, nl. $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Zij in figuur 3 AB $= a_5$ en AC $= a_{10}$, dan kunnen we driehoek ACM interpreteeren als a_{10}^2, mits we als opp.eenheid gebruiken een met dien driehoek gelijkvormigen driehoek, waarvan de basis de lengte-eenheid heeft. Als MC den cirkel voor de tweede maal in D snijdt, is de oppervlakte van driehoek ABD $= a_5^2$, terwijl die van driehoek AME $=$ AM^2 $= a_6^2$ is. Nu is opp. AMC $=$ opp. AMD, zoodat we nog slechts hebben aan te toonen, dat opp. AME $=$ opp. AMDB of opp. ABE $=$ opp. MBD. Daartoe trekken we DF evenwijdig aan AM, waardoor een driehoek ABF verkregen wordt, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van driehoek BMD. Immers is AP $=$ MQ, hetgeen volgt uit de gelijkbeenigheid van de driehoeken ABQ en BPM. Hiermee is dan het bewijs geleverd, daar AFBE een parallelogram is.

Fig. 3.
(AB nog trekken).

Met deze voorbeelden meen ik het goed recht van het gebruik van andere oppervlaktematen bij het M. O. voldoende aangetoond te hebben. Het kan, naar het mij voorkomt, niet anders dan bijdragen tot verruiming van het meetkundig inzicht der leerlingen.

Bovendien heeft de meetkundige behandeling der besproken betrekkingen het *didactische* voordeel, dat Rousseau in de volgende bewoordingen tot uiting moet hebben gebracht:

„Je n'aimais point cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait;

---

[1]) Men bewijze langs dezen weg ook eens de in een gelijkbeenigen driehoek geldende betrekking: $d^2 = a^2 - pq$, waarin a de opstaande zijde, d het segment, begrensd door den top en een willekeurig punt van de basis, p en q de stukken, waarin de basis door dit punt verdeeld wordt.

il me semblait que résoudre un problème de géometrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle."

Van mathematisch standpunt is deze conclusie weliswaar onjuist, maar als paedagogische vingerwijzing toch niet van belang ontbloot.

Tot slot moge nog het voordeel van het gebruik van een driehoekige oppervlakte-maat in bepaalde gevallen gedemonstreerd worden aan het bewijs van een betrekking, die bij het m. o. gewoonlijk niet ter sprake komt, nl. die voor de afstand van de middelpunten van om- en ingeschreven cirkel:

$$MI^2 = R^2 - 2Rr.$$

We maken gebruik van de stelling van Poncelet, die zegt, dat er ∞^1 driehoeken om een gegeven cirkel (kegelsnede) en in een tweede gegeven cirkel (kegelsnede) beschreven kunnen worden, als er één zoo'n driehoek bestaat. We kiezen uit deze serie driehoeken één der twee gelijkbeenige driehoeken, nl. met de top C op MI (fig. 4). Nu wordt als oppervlakte-maat een gelijkbeenige driehoek met opstaande zijden gelijk aan de lengte-eenheid en tophoek $= \angle$ CMB $= \varphi$ gebruikt. Dan is opp. MBC $= R^2$ en opp. MID $= MI^2$ (ID // CB).

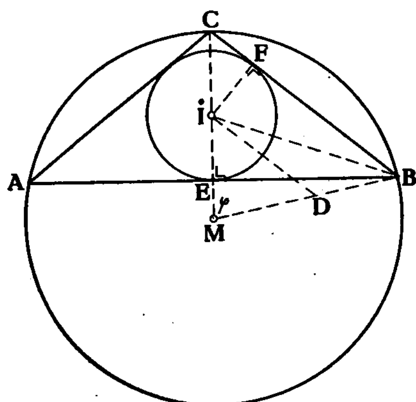


Fig. 4.

Opp. BEI $= Rr$, daar IE $= r$ en MB $= R$ het richtingsverschil φ hebben, maar $\triangle$ BEI $\sim$ $\triangle$ BIF $= \frac{1}{2}$ BCID. q. e. d.

NASCHRIFT. Nadat het vorenstaande reeds geschreven was, kwam mij het belangrijke boek van Höfler: „Didaktik des mathematischen Unterrichts" (1910) in handen. Op blz. 365 daarvan wordt het bewijs van het theorema van Pythagoras meegedeeld, dat Naber in zijn werk (1908) heeft gepubliceerd. Höfler ontleent het echter niet aan Naber, doch aan Bolzano. In een noot merkt hij nl. op:

„Ich habe diesen Beweis aus den ungedruckten Schriften Bernhard Bolzanos. Als 1903 Robert v. Sterneck (damals noch in Wien und Schriftführer der Philosophischen Gesellschaft) das von dieser wieder aufgefundene Konvolut ungedruckter Manuskripte Bolzanos († 1848) aufschürte, war das erste, worauf sein Blick fiel, jener Beweis. Ich habe ihn seither vielen Mathematikern mitgeteilt und von allen gehört, er sei ihnen neu, und von den meisten, dasz sie ihn für den das Wesen der Beziehung am unverhülltesten treffenden halten. Nur wenige beanstandeten den Mangel an Stileinheit. (?. v. W.). Ob ein solcher vorliegt, möchte ich hiermit der Diskussion unterbreiten."

Verder spreekt Höfler nog van „die verblüffende Einfachheit dieses Beweises".

HET VRAAGSTUK VAN SNELLIUS

DOOR

H. G. A. VERKAART.

---

1. In de vorige en in de loopende jaargang is het problema van Snellius een paar keer ter sprake geweest en werd de vraag geopperd, of men bij de oplossing daarvan wel goed doet de oplossing met hulphoek te geven, of dat het misschien aanbeveling zou verdienen meer rechtstreeks te werk te gaan.

Het komt mij voor, en dit blijkt ook uit het opschrift, dat de bedoeling van Wijdenes, die het onderwerp eerst aanroerde, meer geweest is op het practische nut der rechtstreeksche tafels te wijzen (en wat dit betreft, zijn zeker velen het met hem eens), dan de gebruikelijke oplossingsmethode geheel te verwerpen, die met de tangensregel in dit en vele andere vraagstukken toepassing vindt.

Juist het feit, dat men vele voor de leerling schijnbaar ongelijksoortige vraagstukken onder één gezichtspunt kan brengen, pleit het sterkst voor de gevolgde manier. Niet alleen in de Goniometrie hebben beginners (jeugdige leerlingen, ook ouderen, die met wiskunde beginnen) neiging een vraagstuk steeds als een op zich zelf staand iets te beschouwen zonder in te zien, dat het tot een zeker type behoort. En hoe meer algemeene gezichtspunten men kan geven, hoe beter. Dit geldt natuurlijk evenzeer voor andere onderdeelen der wiskunde. Niet voor niets zijn er „Methoden" verschenen voor het oplossen van meetkundige of algebraïsche vraagstukken.

Als oplossingsmethode zou ik dus zeker de gebruikelijke manier op de voorgrond willen stellen. Er kan echter m.i. geen bezwaar tegen bestaan ter afwisseling de rechtstreeksche berekening toe te passen, waardoor dan meteen het al te machinale werken wordt vermeden. Desnoods zou een deel der leerlingen de eene manier en de overigen de andere manier kunnen toepassen. Persoonlijk zal het ieder wel meermalen gebeuren, dat hij, om de proef op een antwoord te maken, het langs twee verschillende wegen berekent.

2. Het is echter niet alleen mijn bedoeling omtrent het bovenstaande mijn meening te zeggen. Ik wil nog voor iets anders de aandacht vragen. Het is mij steeds opgevallen, dat men bij de plaatsaanwijzing van het punt P meestal erg vaag te werk gaat. Gewoonlijk staat, dat van P uit twee genoemde zijden onder een gegeven hoek gezien worden. Dat is echter niet altijd voldoende. Noemen we de drie gezichtshoeken α, β en γ en zijn b.v. β en γ gegeven. Nu kan men op AC en AB aan weerskanten cirkelsegmenten beschrijven, die de hoeken β en γ bevatten. Behalve het hoekpunt A hebben de cirkels, waarvan deze segmenten deel uitmaken, nog vier snijpunten. Voor zoover dit snijpunten zijn van de geconstrueerde segmenten zelf en niet van de overblijvende segmenten der cirkels onderling of met een der andere, zullen die punten bruikbaar zijn. Zonder dat men de hoeken van de driehoek kent, is daar van te voren niets van te zeggen.

Het is daarom verstandig, dat men in sommige leerboeken (b.v. Wijdenes, Leerboek der Gonio- en Trigonometrie) de plaats van P nog nader aanduidt; b.v.: P ligt aan de andere zijde van BC dan A, en soortgelijke aanwijzingen. Dat een dergelijke aanduiding nog niet altijd voldoende is, kan men in de volgende figuur zien.

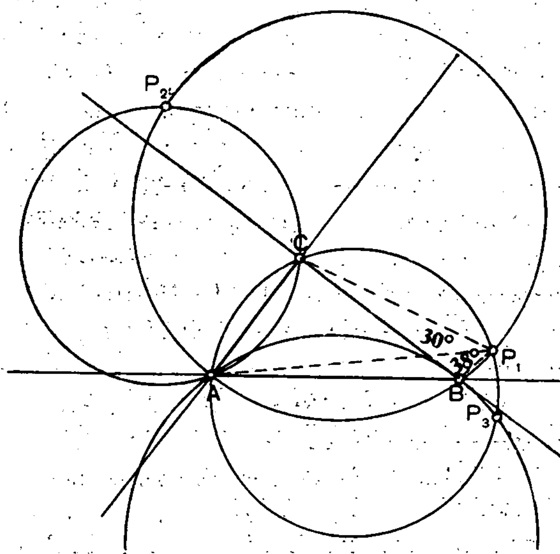


Fig. 1.

Hier is gegeven $\beta = 30°$, $\gamma = 38°$. Beschrijven we de 4 segmenten, dan blijken er 3 punten P te zijn, die aan de voorwaarde vol-

doen. Zegt men er bij, dat P en A aan verschillende kant van BC liggen, dan is dit nog niet voldoende, want P_1 en P_2 voldoen beide ook aan deze voorwaarde. Het is dus noodig de plaats van P nog nader te bepalen, b.v. door aan te geven in welke hoek van de driehoek (of overstaande daarvan) het punt gelegen is.

Men zou kunnen overwegen alle drie de hoeken te geven, waaronder men van P uit de zijden ziet. Ook dit is echter niet altijd afdoende. In fig. 1 ziet men zoowel uit P_3 als uit P_2 de zijden onder hoeken van 8°, 30°, 38°.

Wel is het afdoende, als men de hoeken daarbij een teeken geeft en ze b.v. positief noemt, als P aan dezelfde kant van een zijde ligt als het bijbehoorende hoekpunt van de driehoek en anders negatief. Voor het punt P_2 heeft men dan: $\alpha = -8°$, $\beta = -30°$, $\gamma = 38°$ en voor P_3: $\alpha = 8°$, $\beta = 30°$, $\gamma = -38°$.

Men krijgt dan voor de 7 deelen, waarin het vlak van de driehoek door de rechten, waarop de zijden liggen, verdeeld wordt, telkens een andere verbinding van teekens.

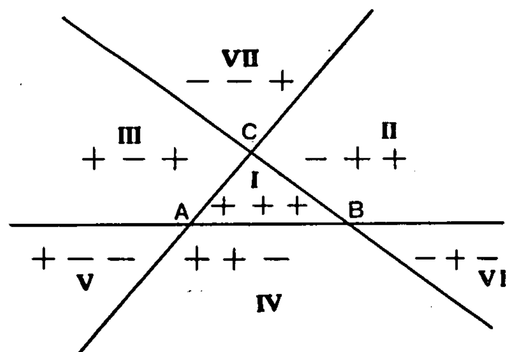


Fig. 2.

Voor het gebied I zijn de drie gezichtshoeken positief, voor II, III en IV is er een negatief, voor V, VI en VII twee.

Vooral voor meergevorderden zou mij deze notatie wel lijken, te meer omdat ze overstemt met de teekens der triangulaire coördinaten.

3. Ten slotte wijs ik nog op een andere oplossingsmethode van het vraagstuk van Snellius. Deze bestaat daarin, dat men eerst de verhoudingen AP : BP : CP (of een daarvan) bepaalt.

In Jg. IV van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde vindt men in eenigszins gewijzigde gedaante het volgende vraagstuk behandeld, dat afkomstig is van *C. A. Cikot*:

Als men van het punt P uit de zijden van △ ABC ziet onder de hoeken α, β en γ, *heeft men*

$$\frac{PA \sin A}{\sin (A - \alpha)} = \frac{PB \sin B}{\sin (B - \beta)} = \frac{PC \sin C}{\sin (C - \gamma)}.$$

Aldaar is deze eigenschap gesteld en bewezen voor een punt binnen de driehoek. De stelling kan echter zonder veel moeite ook bewezen worden voor alle punten in het vlak van de driehoek, *als men bovenstaande notatie gebruikt.* Het is duidelijk, dat men daarbij desgewenscht de negatieve hoeken met 360° kan vermeerderen.

In de figuur Euclides Jg. VI blz. 244 heeft men:

$A = 68°20'40''$; $B = 64°41'20''$; $C = 46°58'$;

$\alpha = -68°42'$; $\beta = 42°16'$; $\gamma = 41°26'$.

Hieruit volgt:

$$PA : PB : PC = \frac{\sin 142°2'40''}{\sin 68°20'40''} : \frac{\sin 22°25'20''}{\sin 64°44'20''} : \frac{\sin 5°32'}{\sin 46°58'}.$$

Hieruit kan men de verhoudingen berekenen en daarna in de driehoeken PBC enz. met de tangensregel verder werken.

De bedoeling van dit laatste gedeelte is natuurlijk niet deze methode in de plaats te willen stellen van de gebruikelijke, maar alleen er eens de aandacht op te vestigen.

BOEKBESPREKINGEN.

Kuno Fladt, *Elementarmathematik*. Band I, *Elementargeometrie*. 3. Teil, *Der Stoff der Obersecunda und Prima* von Kuno Fladt. Leipzig (Teubner) 1931. XI en 337 blz. R.M. 14.

Onder leiding van Studienrat Kuno Fladt en gedeeltelijk door hem zelf geschreven, is bij Teubner een verzamelwerk over de methodiek en didactiek van de elementaire wiskunde aan het verschijnen, dat ook voor Nederlandsche docenten groote waarde kan hebben en waarop daarom hier de aandacht moge worden gevestigd. Het werk is ontworpen in drie afdeelingen, die resp. *Elementargeometrie, Elementaranalysis* en *Angewandte Elementarmathematik* zullen behandelen. Verschenen zijn tot nu toe de deelen 2 en 3 van de Elementargeometrie, deel 2 in 1928, deel 3 thans. Hierin worden resp. besproken de leerstof der meetkunde tot en met Untersecunda, d.w.z. Planimetrie en Stereometrie, en die van Obersecunda en Prima, nl. Beschrijvende Meetkunde, Trigonometrie en Analytische Meetkunde. In voorbereiding is volgens het prospectus van deze afdeeling een eerste deel, dat het voorbereidend geometrie-onderwijs zal bevatten, terwijl de schrijver van het derde deel voortdurend verwijst naar een vierde, dat nog komen zal, maar dat niet in het prospectus staat. Het doel van het werk is, de op school te behandelen leerstof volledig samen te vatten in een vorm, die den leeraar in staat stelt, het geheele vak gemakkelijk te overzien, maar dan tevens haar door inleidende hoofdstukken zoo te verdiepen, dat iemand, die het boek bestudeerd heeft, zijn stof van hooger standpunt uit goed beheerscht. De studie van het werk kan dus ook in ons land in een bekende leemte, die zoowel het universitaire onderwijs aan a.s. leeraren als de actenstudie vertoont, helpen voorzien.

Om een indruk van de wijze van bewerking te geven, schetsen we in het kort, hoe in het pas verschenen deel de Beschrijvende Meetkunde behandeld wordt. In het eerste Hoofdstuk worden op grond van de axiomata van Hilbert de geometrische grondvormen punt, lijn en vlak in hun onderlingen samenhang behandeld (incidentie, dualiteit, oneigenlijke elementen). Door opheffing van de uitzonderingspositie van het oneigenlijke komt men dan tot de axiomata der projectieve meetkunde, waarna omgekeerd uit deze door het aanwijzen van een uitgezonderd vlak als oneigenlijk vlak de affiene en door de invoering van een orthogonaliteitsrelatie tusschen de oneigenlijke punten en de oneigenlijke rechten de abstracte aequiforme geometrie ontstaat. Over de volledige projectieve invoering van de Euclidische metriek zal eerst later worden gesproken. Het tweede hoofdstuk geeft eerst een uitvoerig overzicht over de ontwikkeling van de Be-

schrijvende Meetkunde sedert Monge en vermeldt dan negen verschillende projectiemethoden, waarvan de meeste daarna in compacten vorm worden behandeld en met elkaar in verband worden gebracht. Dan volgt het zuiver didactische gedeelte, de Lehrgang, eigenlijk een programma voor een volledigen cursus, door den leeraar als handleiding te gebruiken, maar niet geschikt om b.v. als leerboek voor een beginneling te dienen. Het is hier, evenals in de volgende hoofdstukken, voortdurend zeer de moeite waard, van de uiteenzettingen van den schrijver kennis te nemen. Men vindt hier den neerslag van de intense studie van de methodiek en didactiek, die de Duitschers reeds jaren lang beoefenen en waarvan de lectuur vaak het gevoel wekt, dat wij het in Holland eigenlijk toch maar erg dilettantisch doen.

In het bijzonder moge nog vermeld worden een uitvoerige en belangrijke bespreking van de bolmeetkunde en de boldriehoeksmeting, een bij ons maar al te zeer verwaarloosd gebied, dat toch juist voor het M.O. zoo groote vormende waarde kan hebben, als men er een voorbeeld van een niet-Euclidische meetkunde in leert zien.

De wetenschappelijke opbouw van de analytische meetkunde geschiedt geheel in den zin van Klein: iedere tak der geometrie is een invariantentheorie van een transformatiegroep. Voor de school is deze gedachtengang natuurlijk niet onmiddellijk toepasbaar. De leergang blijft dan ook de klassieke methode van het rechthoekige assenstelsel en het onbekommerd gebruiken van planimetrische en trigonometrische hulpmiddelen volgen. Een apart hoofdstuk is gewijd aan de behandeling van de kegelsneden. De schrijver gebruikt drie methoden: de elementair-geometrische, de analytische en de perspectieve (kegelsneden als centrale projectie van den cirkel); de zuiver projectieve, die hij, hoewel noode, uit het schoolonderwijs verbant, komt in een aanhangsel nog ter sprake. Belangrijk is nog een systematisch overzicht over alle in het onderwijs toegepaste collineaties, die daarna worden samengevat en vanuit algemeener gezichtspunt worden besproken. Als slot van het werk vindt men een overzicht van de beschikbare elementair-geometrische litteratuur over de behandelde onderwerpen.

E. J. Dijksterhuis.

P. Wijdenes, Beknopte beschrijvende meetkunde. Tweede druk. 112 bladzijden, gec. ƒ 2,—.

P. Wijdenes, Algebraische vraagstukken, deel II. Zesde druk. 187 bladzijden, gec. ƒ 3,25.

Dr. P. Molenbroek en P. Wijdenes, Stereometrie voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. Derde druk. 162 bladzijden, gec. ƒ 2,75. (Groningen, P. Noordhoff, N.V., 1931).

De herziening, die de heer Wijdenes zijne Beknopte beschrijvende meetkunde heeft doen ondergaan, is zoo ingrijpend geweest, dat deze herdruk als een nieuw verschenen werk kan worden besproken. Het boek is sterk gaan verschillen van de overige (mij bekende) schoolboeken over beschrijvende meetkunde, en wijkt ervan af in eene richting, die mijns inziens de goede is. Het kenmerkende van de door den

schrijver gevolgde methode bestaat in het op den voorgrond brengen van de verwantschap tusschen projectie en neergeslagen figuur en tusschen de twee projecties eener figuur, en het gebruiken van deze affiniteiten bij de constructies. Daardoor worden verschillende voordeelen bereikt in vergelijking met de oudere methoden, vooral worden zeer vaak zuiverder teekeningen verkregen. — Niet alleen zijn de grondconstructies uitgevoerd en besproken, maar tevens bevat het boekje de volledige uitwerking van een aantal eindexamenopgaven; de keurige teekeningen gaan vergezeld van eene korte verklaring, die den leerling het begrijpen niet *al* te gemakkelijk maakt. Ik geloof dat het gebruik van dit boekje de bevordering van het ruimte-inzicht bij de beschrijvende meetkunde zeer ten goede zal komen.

Niet minder doortastend is de heer Wijdenes geweest bij het herzien van het tweede deel zijner Algebraïsche vraagstukken. Sedert dit boek voor het eerst verscheen, zijn de opvattingen omtrent algebra-onderwijs sterk gewijzigd. Het uitsluitend aankweeken van technische vaardigheid met verwaarloozing der theorie heeft vrijwel afgedaan, vandaar dat eene verzameling van vraagstukken zonder theorie, al zijn die vraagstukken nog zoo goed gekozen, niet meer kan voldoen. Daarom heeft de schrijver zijne vraagstukkenverzameling aangevuld met korte aanteekeningen over de hoofdpunten der theorie. Dit is op uitstekende wijze geschied: kort en krachtig, zonder langdradige uiteenzettingen is telkens de aandacht gevestigd op de moeilijke punten uit de theorie. Verder zijn een groot aantal vraagstukken, die men tegenwoordig minder belangrijk acht dan vroeger, geschrapt, vooral vraagstukken over de herleiding van wortelvormen en over de oplossing van vierkantsvergelijkingen met verschillende bijzondere formules. Daar tegenover staan enkele aanvullingen en uitbreidingen betreffende onderwerpen, die in den laatsten tijd meer belangstelling genieten, overal zijn vraagstukken van verouderde soorten door modernere vervangen, maar de omvang van het boek is verminderd, de overvloed van vraagstukken is minder groot, hetgeen het gebruik vergemakkelijkt. De belangrijkste toevoegingen hebben betrekking op de gebroken functies, de oneindig voortloopende reeksen en de limieten. Wanneer ook het eerste deel der Algebraïsche vraagstukken op dezelfde wijze zal zijn herzien, bezitten wij een voortreffelijk, geheel op de hoogte des tijds gebracht, leerboek der algebra.

De door den heer Wijdenes alleen bezorgde derde druk der schoolstereometrie van Molenbroek en Wijdenes bevat verbeteringen in de behandeling der pooldrievlakshoeken en van eenige inhoudsformules. Vooral de afleiding der inhoudsformule van de pyramide is bijzonder goed geslaagd. J. H. S.

Beknopt leerboek der Beschrijvende Meetkunde door H. J. v. Veen, hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft. P. Noordhoff, N.V., 1931, Groningen (prijs *f* 10.50).

Zooals de schrijver zelf in het voorbericht opmerkt, is dit beknopte leerboek, dat nog altijd 362 bladzijden tekst telt, in het bijzonder bestemd voor de studenten van de T. H. Van het meer uitgebreide, in

2 deelen verschenen „Leerboek der Beschrijvende Meetkunde" van denzelfden schrijver wijkt het natuurlijk in vele opzichten af; niet alleen zijn daaruit verschillende hoofdstukken weggelaten of bekort, maar hier en daar is een geheele omwerking noodzakelijk gebleken. Een afzonderlijke atlas met 381 teekeningen (in denzelfden prijs inbegrepen) vergezelt het leerboek.

Voor de studenten der T. H. beteekent deze uitgave een groote aanwinst; de uitstekende verzorging zoowel van de tekst als van de teekeningen maakt het leerboek aantrekkelijk en zal haar invloed wel doen gelden; ook den uitgever komt voor de uitvoering alle lof toe.

Daar ongetwijfeld ook buiten de T. H. belangstelling zal bestaan voor dit beknopte leerboek, dat onmiddellijk aansluit aan hetgeen op de H.B.S. met 5-jarigen cursus wordt onderwezen, volgt hier een korte opsomming van den inhoud. Allereerst ondergaat de gewone rechthoekige projectie een uitbreiding met een hoofdstuk over den cirkel, den rechten cirkelkegel en -cylinder en de bol met schaduwen (in fig. 19 is blijkbaar een vergissing ingeslopen betreffende de eigenschaduw van den cylinder). Daarna komen de andere projectiemethoden aan de beurt. Van de centrale projectie worden slechts de beginselen besproken, die meer als inleiding voor de gewone perspectief kunnen worden beschouwd, terwijl de behandeling van de perspectief, de scheeve projectie en de orthogonale axonometrie aanvankelijk niet verder gaat dan de rechte cirkelkegel en -cylinder en de bol met schaduwen. Daarna komen andere oppervlakken en de ruimtekrommen aan de beurt, bij welker besprekingen meermalen van andere projectiemethoden dan de gewone rechthoekige projectie wordt gebruik gemaakt.

Na een algemeene inleiding worden eerst de willekeurige kegels en cylinders besproken met hunne vlakke doorsnijdingen en ontwikkelingen in een plat vlak, waarna een hoofdstuk volgt over de schroeflijn (het ontwikkelbare schroefvlak wordt wel wat stiefmoederlijk behandeld). Vervolgens worden de omwentelingsoppervlakken besproken, in het bijzonder de torus met vlakke snijkrommen, schijnbare omtrekken en schaduwen, en de tweede-graadsomwentelingsoppervlakken, waarvan de eenbladige omwentelingshyperboloïde een uitvoerige behandeling ten deel valt. In de hoofdstukken over de scheeve regelvlakken worden verschillende constructies besproken en uitgevoerd ten aanzien van de eenbladige hyperboloïde, de hyperbolische paraboloïde en de wig van Wallis, terwijl een kortere bespreking volgt over een 4e graadsnormalenoppervlak, de conoïde van Plücker, het scheeve tongewelf, de bolconoïden en de verschillende soorten van schroefvlakken.

Ten slotte volgt een hoofdstuk over de doorsnijding van twee oppervlakken, in het bijzonder van tweedegraadsoppervlakken met hunne verschillende vormen van bikwadratische doorsnijdingskrommen, en van omwentelingsoppervlakken.

Bij elk hoofdstuk komen met zorg gekozen opgaven voor; in den tekst treft men ook uitgewerkte opgaven aan, die de waarde der behandelde stof belangrijk verhoogen. Aan het eind zijn de opgaven der propaedeutische examens T. H. voor C, W, S, E en N in Mei 1924—1930 opgenomen.

Verder bevat dit beknopte leerboek, evenals het meer uitgebreide, een „Aanhangsel" (ruim 45 bladzijden), waarnaar in den tekst veelvuldig wordt verwezen, hetgeen m.i. echter meer storend werkt dan aangenaam is. Daarin worden behandeld: 1°. de ellips als parallelprojectie van den cirkel, 2°. de vlakke doorsneden van omwentelingskegels, 3°. de centrale collineatie, 4°. de stellingen van Pascal en Brianchon. Van deze onderwerpen zullen de eigenschappen en constructies der kegelsneden in den regel wel afzonderlijk worden behandeld, vóórdat ze in de Beschrijvende Meetkunde hun toepassing vinden, om welke reden ze ook in het leerboek beter vóórin op hun plaats zouden zijn; om begrijpelijke redenen echter is dit niet verkieselijk. Het leerboek zou er m.i. niet minder om zijn, wanneer het aanhangsel ontbrak en voor de eigenschappen en constructies der kegelsneden eens en voor al werd verwezen naar verschillende werkjes, die daarover handelen. J. G. R.
